ELEMENTA GEOMETRIÆ QUÆ NOUA, ET BREUI METHODO DEMONSTRAUIT D...

Ottaviano Cametti

Digitized by Google

3. 3. 387

3 N. 3

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA
GEOMETRIAE.

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE

QVAE

NOVA, ET BREVI METHODO

DEMONSTRAVIT

D. OCTAVIANVS CAMETTVS

MONACHVS BENEDICTINVS

CONGREGATIONIS VALLIS-VMBROSAE

REGIAE LVGDVNENSIS ACADEMIAE SOCIVS

ET IN PISANO LYCEO

PVBLICVS GEOMETRIAE, ET MECHANICAE

PROFESSOR.

Editio altera priori auctior, & correctior.

FLORENTIAE ANNO MDCCLX.

EX TYPOGRAPHIA IMPERIALI

SVPERIORVM ADPROBATIONE.

Digitized by Google

Παιδικὰ (Πλάτων) οἴεται ταῦτα τὰ μαθήματα τὰ προπαρασκευαστικὰ, καὶ καθαρτικὰ ὄντα ψυχῆς εἰς τὸ ἐπιτήδειον αὐτὴν πρὸς φιλοσοφίαν γενέσθαι.

Pueris eorumque aetati cenſet (Plato) convenire has Mathematicas diſciplinas, quae animam praeparant, & defaecant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſsendam idonea reddatur.

Theo Smyrnaeus Cap. I.

PRAEFATIO.

CUM in Euclideis Elementis crebrò occurrant Propoſitiones paullò prolixius, atque etiam obſcurius demonſtratae, quae negotium pleriſque ita faceſſunt, ut vel ad Geometriam animum non convertant, vel ſi ad diſciplinae ipſius ſtudium alacri fortaſſe animo ſe contulerint, paullò poſt operis difficultate commoti, faſtidioque affecti, a ſuſcepto itinere ſoleant declinare; iure idcir-

Digitized by Google

idcircò optabatur Tractatus aliquis mole parvus, Tyronumque captui accomodatus, qui & longiores Euclidis demonſtrationes contraheret, & quod ſibi probandum, atque inveniendum proponeret, meridiana luce clarius exhiberet. Vtrumque vero, ni fallor, in hoc Tractatu me arbitror praeſtitiſſe. Nam ea in brevibus Corollariis ſolvuntur paſſim Problemata, & Theoremata demonſtrantur, quae apud Euclidem prolixo indigent ratiocinio; ac praeterea cum fermè ubique Propoſitiones ita mutuò ſint connexae, ut vel immediatè una ex altera inferatur, vel ex conſectariis eius fluat, omnis demonſtratio nitida plane erit, Tyronumque captui accomodata. Id demùm commodi ex hoc tractatu colligi etiam poteſt, quod nempe in nonnullis Propoſitionibus principia Geometriae Practicae demonſtrantur, in Scholiis verò, quorum non exigua copia eſt, abſtractae Propoſitiones Euclidis Agrimen-

ſu-

ſurae, Aſtronomiae, atque Mechanicae applicantur, ut inde ſciant Tyrones, ſe poſſe earum ope, ac beneficio locorum diſtantias noſcere, inacceſſas altitudines menſurare, atque agrorum areas, & ſoliditates corporum invenire.

Hic autem Tractatus in tres diviſus eſt partes, quarum prima Rectarum interſectiones tùm inter ſe, tùm etiam cum Circulo contemplatur, praecipuaque Figurarum planarum ſymptomata, atque areas comprehendit. In altera vero parte octo proportionum Regulae explicantur, quibus tota fermè Geometrarum Dialectica eſt innixa, exhibenturque Rectarum, & Figurarum etiam ſimilium proportiones. Ad tertiam partem quod ſpectat, ea de Planorum occurſu tùm inter ſe, tùm cum Lineis Rectis agit, Corporumque ſymptomata, menſuras, rationemque mutuam contemplatur.

Tandem cum noſtra haec methodus ab

Digitized by Google

ab Euclidea maximè diſtet, neceſſum fuit, ut ordo Propoſitionum Euclidis, quae in Matheſi citari ſolent, penitùs verteretur. Quare ne quid incommodi patiantur qui hiſce elementis operam navant, Elenchum Propoſitionum Euclidis ad huius Tractatus calcem poſuimus, ut locus, quem habent ſingulae in hoc libro, uno ictu oculi conſpiciatur. Nemini autem mirum videri debet, ſi quaedam Propoſitiones Euclidis in hoc Tractatu fuerint praetermiſſae; novimus namque illas nullum fermè habere uſum, neque eſſe in noſtra methodo neceſſarias. Quae omnia cum in ſtudioſae Iuventutis commodum fuerint a nobis excogitata, benignè excipienda eſſe confidimus, ac ſperamus.

PARS

Digitized by Google

PARS PRIMA

DE FIGVRARVM PLANARVM SYMPTOMATIS, AC MENSVRIS.

CAPVT I.

De principiis Geometriae.

DEFINITIO I.

1. G*Eometria* eſt ſcientia magnitudinum quatenus ſunt undique terminatae, ſolidorum nempe, ſuperficierum, & linearum.

SCHOLION.

2. Cum Geometrae ſcopus ſit magnitudines dimetiri, hae terminatae utique eſſe debent; mens quippe humana quae finita eſt, nullo modo poteſt infinitas magnitudines menſurare.

DEFINITIO II.

3. *Solidum* eſt magnitudo in longum, latum, & profundum extenſa.

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 1. 4. Quia magnitudo AH extenditur iuxta longitudinem RS, iuxta latitudinem RO, & iuxta profunditatem ſive altitudinem RA; utique ipſa in longum, latum, & profundum extenſa eſt, atque adeo erit (3) ſolidum.

DEFINITIO III.

5. *Superficies* eſt ſolidi terminus, ſeu magnitudo in longum tantúm, & latum extenſa.

SCHOLION.

6. Cum ſolidum idem AH ſit undique terminatum, habebit pro terminis ſuperficies, ſive facies laterales AS, FH, VO, LR, una cum ſuprema LF, infimaque OS, quae longae quidem, ac latae ſunt, non autem profundae, alioquin non ſolum termini, ſed partes quoque eſſent ſolidi AH.

DEFINITIO IV.

7. *Linea* eſt terminus ſuperficiei, ſeu magnitudo in longum tantúm extenſa.

SCHOLION.

8. Quoniam ſuperficies AS, FH, VO, LR,

Digitized by Google

LR, LF, OS ſunt finitae, utique earum quaelibet ut LF, habet pro terminis lineas AF, FV, VL, LA, quae longae quidem ſunt, ſed non latae; alioquin non termini ſolum, ſed partes quoque eſſent ſuperficiei LF.

DEFINITIO V.

9. *Punctum* eſt terminus lineae, ac proinde nulla praeditum extenſione.

SCHOLION.

10. Quia finitae ſunt lineae AF, FV, VL, LA, utique illarum quaelibet ut AF, pro terminis habet puncta A & F, quae longa eſſe non poſſunt; alioquin non ſolum termini, ſed partes quoque eſſent rectae AF.

DEFINITIO VI.

11. Linea AO dicitur *recta* ſi minima ſit omnium linearum habentium eoſdem terminos A & O. Fig. 2.

COROLLARIUM I.

12. Quare ſi inter omnes lineas AEO, ASO, AO &c. habentium eoſdem terminos A & O, una AO brevitate caeteris antecellat, haec linea recta erit.

COROLLARIUM II.

13. Ergo a puncto ad punctum unica tantúm recta linea duci poteſt, quippe inter haec puncta unica tantúm linea omnium breviſſima eſſe poteſt. A 2 14.

Digitized by Google

COROLLARIVM III.

14. Cum a puncto ad punctum unica tantúm recta linea duci (13) poſſit, ſequitur duas rectas per eadem duo puncta traductas, mutuo coincidere.

COROLLARIVM IV.

15. Duae ergo rectae ſpatium minime claudunt. Vt enim duae lineae veluti AEO, ASO ſpatium claudant, ambae tranſire debent per duo puncta A & O quin mutuo coincidant, quod duabus rectis lineis convenire non (14) poteſt.

COROLLARIVM V.

16. Ad ſpatium ergo claudendum tres ſaltem neceſſariae ſunt rectae AF, FE, AE, quarum una quaevis AE minor erit ſumma reliquarum AF, FE; nam recta AE brevior (11) erit inflexa linea AFE, habente eoſdem terminos A & E.

Fig. 3.

DEFINITIO VII.

17. *Planum* ſeu *Plana ſuperficies* eſt breviſſima omnium habentium eoſdem terminos.

DEFINITIO VIII.

18. *Angulus planus rectilineus* eſt duarum rectarum AE, AC in plano mutuó ſe tangentium, alterius ad alteram inclinatio. Punctum A anguli *vertex* dicitur, rectae vero AE,

Fig. 4.

Digitized by Google

AE, AC eiuſdem *crura*, aut *latera* appellantur.

COROLLARIVM I.

19. Igitur eadem crurum inclinatione manente, nec augetur, nec minuitur angulus, quamvis eiuſdem crura, vel latera augeantur, vel minuantur.

COROLLARIVM II.

20. Equales ergo erunt anguli EAC, FOR, ſi dum ſibi vertices A & O mutuo imponuntur, crura AE, AC coincidant cum cruribus OF, OR; tunc enim crura anguli utriuſque ſunt aequaliter ad ſe invicem inclinata. Fig. 4. 5.

COROLLARIVM III.

21. Si vero dum ſibi imponuntur vertices A & O, crus quidem unum OF coincidat cum AE, ſed reliquum crus OR cadat intra angulum EAC, hic angulus maior erit altero FOR. Fig. 5. 6.

DEFINITIO IX.

22. Recta RA *perpendicularis* eſt ad aliam CF, quando in ipſam incidens facit hinc & inde aequales angulos RAC, RAF. Hi autem anguli vocantur *recti*. Fig. 7.

COROLLARIVM.

23. Si recta RA ſit perpendicularis ad aliam AC rectam, ſeu ſi rectus (22) fuerit

Digitized by Google

ric angulus RAC; producta CA ad F, novus angulus RAF aequabitur RAC.

DEFINITIO X.

Fig. 7. 24. Angulus *acutus* dicitur, qui minor eſt recto, ut EAC; *obtuſus* autem, qui recto maior, ut EAF.

DEFINITIO XI.

25. *Diſtantia* puncti a linea recta, eſt linea breviſſima omnium, quae ex illo ad hanc duci poſſunt.

DEFINITIO XII.

Fig. 8. 26. Lineae rectae AR, CF dicuntur mutuo *parallelae*, ſi in eodem plano iacentes, & utrinque in infinitum productae, eandem ſemper diſtantiam ſervant inter ſe.

COROLLARIVM I.

27. Erunt ergo parallelae AR, CF, ſi puncta ſingula unius AR eandem ſemper ubique diſtantiam ſervent ab alia recta CF.

COROLLARIVM II.

28. Parallelae igitur AR, CF nunquam poterunt convenire; alioquin non eandem ubique haberent diſtantiam inter ſe.

DEFINITIO XIII.

29. Superficies quae una, vel pluribus lineis undique terminatur, *Figura* dicitur, quae re-

Digitized by Google

rectilinea quidem erit, ſi lineae terminantes ſint rectae, *curvilinea* vero, ſi curvae.

DEFINITIO XIV.

30. *Circulus* eſt figura plana unicâ curvâ lineâ comprehenſa, quae vocatur *circumferentia*, ad quam omnes rectae lineae CA, CS, CH &c. a puncto medio C quod *centrum* dicitur, ductae, aequales ſunt inter ſe. Hae autem aequales rectae *radii*, vel *ſemidiametri* circuli nuncupantur. Fig. 9.

COROLLARIVM I.

31. Igitur circumferentiae idem centrum habentes, vel ſibi invicem nunquam occurrent, vel ſi occurrant, mutuo coincidant oportebit. Nam ſi circumferentiae radios habeant inaequales, illa cuius minor eſt radius, tota intra reliquam cadet cuius radius maior eſt, ideoque ſibi invicem non occurrent. Si vero circumferentiae aequales habeant radios, tunc ambae a communi centro aeque diſtabunt, ac proinde mutuo coincidant oportebit.

COROLLARIVM II.

32. Duae igitur circumferentiae ita ſibi occurrentes, ut non coincidant, commune centrum non habent; nam ſi haberent, utique ſibi mutuo (31) non occurrerent, vel ambae mutuo conciderent.

Digitized by Google

COROLLARIVM III.

33. Quare circuli ſe ſecantes, aut etiam mutuo ſe tangentes, commune centrum non habent.

DEFINITIO XV.

34. Linea recta AH per centrum circuli ducta, & ad circumferentiam utrinque terminata, *diameter* dicitur, quae circulum, & circumferentiam in duas aequales dividit partes.

Fig. 9.

DEFINITIO XVI.

35. Recta SH ad circumferentiam utrinque terminata, ſed non per centrum traiecta, vocatur *chorda* circuli, aut *ſubtenſa*.

DEFINITIO XVII.

36. Circuli *arcus* eſt pars quantalibet circumferentiae; *gradus* autem eſt pars eiuſdem tercenteſima ſexageſima. Singulos gradus partimur in 60. aequales partes dictas *minuta prima*, & quodvis minutum in 60. *minuta ſecunda*, atque ita ſemper. Quare circumferentia erit graduum 360., dimidia vero circumferentia graduum 180., quadrans demum graduum 90.

DEFINITIO XVIII.

37. Portio circuli SHV. comprehenſa a chorda SH, & arcu SVH, dicitur *ſagmentum*

Digitized by Google

tum circuli. Segmentum SHV, quod ſemicirculo minus eſt, vocatur *ſegmentum minus*, reliquum vero ſegmentum SHA *ſegmentum maius*.

DEFINITIO XIX.

38. *Angulus ad circumferentiam* eſt, cuius vertex, & crura ad circumferentiam circuli terminantur, veluti eſt angulus AHS. *Angulus* vero *ad centrum* eſt ille, cuius vertex in centro circuli eſt, crura autem ad circumferentiam circuli terminantur, veluti eſt angulus ACS. Fig. 9.

DEFINITIO XX.

39. Recta LO circulum *tangit* in A, ſi ita ipſi occurrat, ut extra circulum tota cadat. Fig. 9.

DEFINITIO XXI.

40. Circulus ACF alium ARS *intus tangit*, ſi ita illi occurrit, ut totus intra ipſum cadat. Circulus vero ARS alium OSE *extra tangit*, ſi ita illi occurrit, ut totus extra ipſum cadat. Fig. 10. Fig. 11.

DEFINITIO XXII.

41. *Triangulum rectilineum* AFE eſt figura tribus rectis lineis terminata, quae eiuſdem *latera* dici ſolent. Haec autem latera ſi aequentur, triangulum dicitur *aequilaterum*; ſi duo tantum latera ſint aequalia, trian- Fig. 3.

Digitized by Google

triangulum vocatur *iſoſceles*; demum ſi latera omnia fuerint inaequalia, triangulum *ſcalenum* dicitur.

Definitio XXIII.

42. In quovis triangulo AFE latus AE ad quod terminantur crura FA, FE, dicitur *oppoſitum* angulo AFE.

Definitio XXIV.

43. Triangulum *rectangulum* illud eſt, quod unum angulum rectum habet; *obtuſangulum* vero, quod unum obtuſum habet; denique *acutangulum* appellatur, quod tres angulos acutos habet.

Definitio XXV.

Fig. 12. 44. *Rectangulum* AEFC eſt figura quadrilatera, quatuor angulos rectos habens.

Definitio XXVI.

Fig. 13. 45. *Quadratum* RCLH eſt figura quadrilatera, aequilatera, & rectangula. Recta autem RH dicitur quadrati *latus*, aut *radix*.

Definitio XXVII.

Fig. 14. 46. *Rhombus* AEFC eſt figura quadrilatera, aequilatera, non autem rectangula.

Definitio XXVIII.

Fig. 15. 47. *Rhomboides* ALSO eſt figura quadrilatera, non rectangula, latera appoſita AL; OS,

Digitized by Google

OS, nec non AO, LS aequalia habens.

DEFINITIO XXIX.

48. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera AEFC, cuius bina oppoſita latera AE, CF, itemque AC, EF ſunt mutuo parallela. Recta autem AE per angulos oppoſitos ducta, appellatur *Diagonalis*. Fig. 12.

DEFINITIO XXX.

49. Figura CRHL dicitur circulo *circumſcripta*, ſi ſingula eius latera circulum tangant. Fig. 16.

DEFINITIO XXXI.

50. Figura AEOS circulo eſt *inſcripta*, ſi omnes eiuſdem anguli fuerint in circumferentia.

DEFINITIO XXXII.

51. Figura *polygona* eſt, quae pluribus quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, ſex, ſeptem &c. figura *Pentagonum*, *Hexagonum*, *Heptagonum &c.* dici ſolet.

DEFINITIO XXXIII.

52. Figura polygona eſt *regularis* aut *ordinata*, quae aequilatera, & aequiangula eſt.

DEFINITIO XXXIV.

53. *Menſura* linearum eſt recta linea arbi-

Digitized by Google

bitrariae longitudinis in partes minores pro lubitu dividenda, & ſubdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in decem aequales partes, quas pedes dicunt, unde ipſa *decempeda*, aut etiam *pertica* appellatur. Pes ſubdividitur in decem *digitos*, digitus in decem *lineas*, & ſic porro.

SCHOLION I.

54. Menſurae longitudo, atque diviſio non eſt eadem apud omnes. Aliquas celebrium menſurarum varietates exponet Tabula ſequens in particulis iſtiuſmodi, qualium Pes Regius Pariſinus eſt 1440. Continet is nempe 12. digitos, digitus 12. lineas, linea 10. particulas, ideoque pes integer pariſienſis continebit particulas 1440. *Paſſus* eſt pedum 5, & *Milliare* eſt paſſuum 1000.

Pès Regius			
Pariſinus	1440.	Cubitus Florentinus	2597.
Romanus	1320.	Brachium Florentinum Agrimenſorum	2430.
Rhenanus	1391. $\frac{3}{10}$	Brachium Senenſe	2672. $\frac{16}{25}$
Londinenſis	1350.	Brachium Mediolanenſe	2166.
Suecicus	1316. $\frac{1}{2}$	Brachium Parmenſe	2423.
Venetus	1540.	Brachium Bononienſe	2640.
Bononienſis	1682. $\frac{2}{5}$	Brachium Pariſienſe	5226.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION II.

55. *Stevinus* omnium primus fuit, qui ut facilior calculus redderetur, decimalem diviſionem menſurae in geometria practica uſurpavit. Vſus tamen huiuſmodi diviſionis apud Sinenſes iamdiu invaluerat; teſtatur ſiquidem P. Noel, eam non ſolum in menſuris, verum & ponderibus ſinicis adhiberi.

DEFINITIO XXXV.

56. *Pars aliquota* illa eſt, quae aliquoties repetita, integro fit aequalis. Ita unitas eſt pars aliquota numeri cuiuſcumque; ex unitatibus enim pluries repetitis quicumque numerus coaleſcit. *Aliquanta* vero *pars* eſt, quae aliquoties repetita, ſemper vel maior, vel minor eſt toto. Ita longitudo 4. pedum eſt pars aliquanta longitudinis 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adaequat, ter autem repetita eam excedit.

DEFINITIO XXXVI.

57. *Commenſurabilia* ea ſunt, quae partem aliquotam communem habent. Ita duo numeri qualeſcumque commenſurabiles eſſe debent; habent enim ad minus pro communi parte aliquota (56) unitatem. *Incommenſurabilia* vero ſunt illa, quorum nulla datur aliquota pars communis.

DE-

Digitized by Google

DEFINITIO XXXVII.

58. *Menſura* figurae eſt quadratum, cuius latus eſt perticae aequale, diciturque *pertica quadrata*. Haec dividitur in *pedes quadratos*, & pes quadratus in *digitos quadratos*, atque ita ſemper. Summa autem horum quadratorum, quae in figura aliqua continentur, eius *magnitudo*, aut etiam *area* nuncupatur.

SCHOLION.

59. Quemadmodum perticae, pedes, ac digiti lineares, qui in data linea continentur, in unam ſummam collecti, eiuſdem longitudinem (53) repraeſentant, ita ſi perticae quadratae, quadrati pedes, vel digiti in figura contenti, in unam ſummam colligantur, eius magnitudinem, ſive aream exhibebunt.

DEFINITIO XXXVIII.

60. Propoſitio aliquid affirmans, vel negans, dicitur *theorema*; quae vero quidquam praecipit efficiendum, *problema* dicitur. In theoremate, & problemate *theſis* eſt, quod enunciatur, vel proponitur efficiendum; *hypotheſis* vero id eſt, quod in theoremate, & problemate praeſupponitur.

DEFINITIO XXXIX.

61. *Poſtulatum* eſt id, quod poſſe fieri per ſe

ſe liquet. Sunt autem quatuor, quae ſequuntur.

I.

62. A puncto ad punctum recta linea duci poteſt.

II.

63. Rectam lineam terminatam in directum producere quantúm libet.

III.

64. Ex dato puncto veluti centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

IV.

65. Ex recta maiori auferre partem minori aequalem.

DEFINITIO XL.

66. *Axiomata* ſunt veritates tam certae, tamque perſpicuae, ut ſolis terminis intellectis, aſſenſum mentis extorqueant. Sunt autem ſequentia.

I.

67. Si aequalibus aequalia addas, tota erunt aequalia.

II.

68. Si ab aequalibus aequalia demas, quae remanent, ſunt aequalia.

III.

Digitized by Google

III.

69. Si ab aequalibus demas inaequalia, quae remanent, ſunt inaequalia.

IV.

70. Si inaequalibus aequalia addas, tota erunt inaequalia.

V.

71. Si ab inaequalibus aequalia demas, quae remanent, ſunt inaequalia.

VI.

72. Totum ſua parte maius eſt; aequale eſt autem partibus ſimul ſumptis.

VII.

73. Quae ſuper impoſita mutuo ſibi congruunt, ſunt aequalia.

VIII.

74. Aequales rectae, aequales ſemicirculi, & aequales arcus eiuſdem circuli mutuo ſibi congruunt.

IX.

75. Quae eidem ſunt aequalia, ſunt quoque aequalia inter ſe.

X.

76. Quae eiuſdem, vel aequalium ſunt dupla, tripla &c., ſunt quoque aequalia inter ſe.

CA-

Digitized by Google

CAPVT II.

De mutua rectarum cum curvis circularibus interjectione, deque praecipuis triangulorum ſymptomatis.

PROPOSITIO I.

77. *SI in circulo quodvis aliud a centro C accipiatur punctum A, ex quo rectae plures AO, AR, AS, AE in circumferentiam cadant; omnium maxima erit AR per centrum tranſiens, & ſi arcus RO ſit arcui RS aequalis, etiam AO aequabitur ipſi AS.* Fig. 17. 18. 19.

I. Ducatur ex centro C radius (62.) CO. Cum radius CR ſit aequalis (30.) radio CO, addita utrinque AC, ſumma AC, & CR, ſeu recta AR aequalis erit duabus (67.) ſimul AC, CO. Sed in triangulo ACO duae ſimul AC, CO ſunt (16.) maiores tertia AO; ergo etiam AR maior erit AO. Simili ratiocinio eadem AR maior oſtendetur quacumque alia; ergo omnium maxima eſt AR.

II. Cum arcus RO aequalis ſit (*ex hyp.*) ipſi RS, ſi ſemicirculus FOR ponatur ſupra alium FER, utique arcus RO congruet (74.) ſibi aequali RS, punctumque O cadet in S. Igitur etiam AO congruet cum (14) AS, ideoque (73.) illi aequalis erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Fig. 19. 78. Igitur in circulo EFOR omnium chordarum maxima eſt diameter FCR.

PROPOSITIO II.

79. *Iſdem poſitis, ſi arcus RO ſit minor arcu RE; viciſſim recta AO maior erit AE.*

Fig. 17. 18. 19. Eſto arcui RO aequalis alter RS, iunctâque AS, quae (77) aequalis erit AO, agatur CE ſecans AS in I. In triangulo SIC duae ſimul SI, IC ſunt (16) maiores tertia CS; ſed CS eſt (30) aequalis CE. Ergo duae ſimul SI, IC maiores quoque erunt CE, unde hinc, & inde ablata CI, erit SI (71) maior IE. Si ergo tàm maiori SI, quam minori IE addatur IA, tota AS (70) maio erit duabus ſimul IE, AI; ſed iſtae in triangulo EIA ſunt (16) maiores AE. Ergo AS, vel ſibi aequalis AO multo maior erit AE. Q. E. D.

COROLLARIVM.

80. Igitur ſi AO ſit maxime AR propior quám recta AE, erit AO maior AE.

PROPOSITIO III.

Fig. 17. 18. 19. 81. *Iſdem poſitis, ſi recta AO ſit aequalis AS; etiam arcus RO aequalis erit arcui RS.*

Ar-

Digitized by Google

Arcus RO nequit eſſe minor arcu RS; nam ſi ita, recta AO maior foret (79) AS, contra hypotheſim. Sed neque arcus idem RO maior eſſe poteſt arcu RS, quia ſi eſſet, recta AO minor (79) foret AS, iterum contra hypoteſim. Cum ergo arcus RO nec maior, nec minor ſit arcu RS, huic aequalis erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

82. Hinc duae chordae aequales AO, AS ad idem circumferentiae punctum A terminatae, ſubtendunt aequales arcus AO, AS. Nam dimidia circumferentia AOR aequatur (34) alteri ASR; ſed ob aequales (*ex hyp.*) rectas AO, AS, arcus RO (81) adaequat arcum RS. Ergo reliquus arcus AO reliquo AS erit aequalis. Igitur ſi ex eodem circumferentiae puncto A ſumantur utrinque ope circini aequalia intervalla AO, AS, capientur quoque aequales arcus AO, AS. Fig. 19.

PROPOSITIO IV.

83. *SI latera ſingula AC, CO, OA trianguli ACO aequentur lateribus ſingulis AC, CS, SA trianguli ACS; etiam anguli aequalibus lateribus oppoſiti, & tota triangula aequabuntur.* Fig. 17. 18. 19.

Centro C, & intervallo CO deſcribatur (64.) circulus OEF, qui ob aequales

B 2 (*ex hyp.*)

(*ex hyp.*) CO, CS, tranſibit quoque per . Producatur (63.) AC ad R. Quia AO ponitur aequalis AS, aequabuntur (81.) arcus RO, RS, unde ſi ſemicirculus FOR ſuperimponatur reliquo FSR, punctum O cadet (74.) in S, totumque triangulum AOC congruet alteri ASC; ideoque [73.] huic aequale erit, & angulus ACO aequabitur ACS, angulus AOC aequabitur ASC, ac reliquus CAO aequalis erit reliquo CAS. Q. E. D.

COROLLORIVM I.

Fig. 20. 84. Duo igitur circuli LBH, BGH, quorum centra ſunt A, & C, nonniſi in duobus punctis B, & H ſe mutuo ſecant. Si enim ſe quoque ſecarent in alio puncto G, hoc utique in utriuſque circuli circumferentia ſitum eſſet, ideoque iunctâ ex centro A rectâ AG, haec foret radius circuli LBH, ſeu (30.) aequalis AB. Ergo ob aequales radios CB, CG, & rectam AC communem triangulis ABC, AGC, angulus BAC aequaretur (83.) alteri GAC, totum parti, quod (72.) eſt abſurdum.

COROLLARIVM II.

Fig. 21. 85. Hinc biſecare novimus datum angulum rectilineum EAL. Sumptis (65.) enim aequalibus AC, AS, centris C, & S, atque intervallo CS deſcribantur duo arcus circuli SOH, COF ſe ſecantes in O, & iungatur AO, quae biſecabit angulum EAL.

Cum

Cum enim C ſit centrum circuli SOH, radius CO (30.) aequalis erit radio CS; ſed ob centrum S circuli COF, etiam radius OS aequatur (30.) radio CS. Ergo CO aequalis quoque (75.) erit OS, & ſingula latera OC, CA, AO trianguli ACO aequantur ſingulis lateribus OS, SA, AO trianguli ASO, ideoque (83.) angulus CAO aequabitur angulo SAO, vel angulus EAO aequabitur LAO. Igitur AO biſecat angulum EAL.

COROLLARIUM III.

86. Quia rectae CO, OS, CS oſtenſae (85.) ſunt aequales, aequilaterum (41) erit triangulum COS. Igitur liquet modus ſupra datam quamcumque rectam CS triangulum aequilaterum deſcribendi.

COROLLARIUM IV.

87. Similiter ex dato quoque puncto H excitabitur ad OR perpendicularis HA. Sumantur namque utrinque aequales HS, HL, ſuperque SL facto triangulo (86.) aequilatero SAL, iungatur AH, quae perpendicularis quaeſita erit. Cum enim ſingula latera HS, SA, AH trianguli SAH aequentur ſingulis lateribus HL, LA, AH trianguli LAH, utique (83.) angulus AHS aequalis erit angulo AHL, ideoque erit AH perpendicularis (22.) ad rectam OL. Fig. 22.

Digitized by Google

COROLLARIVM V.

Fig. 23. 24. 88. Demum pronum ex dictis eſt ad punctum datum A rectae AV angulum efficere aequalem dato O. Centris ſiquidem O, & A, radiiſque aequalibus OR, AE deſcribantur arcus RC, EL, iunctaque chorda RC, huic aequalis capiatur circino chorda EF, perque F traiiciatur AS: dico angulum SAV dato O eſſe aequalem. Singula quippe latera trianguli AFE aequantur (*ex conſtr.*) ſingulis lateribus alterius trianguli OCR; ideoque (83.) angulus A aequalis erit angulo dato O.

PROPOSITIO V.

Fig. 25. 89. *Menſura cuiuſvis ad centrum anguli ASV eſt arcus AV a cruribus anguli interceptus.*

Ducta chorda AV, huic aequalis capiatur circino chorda alia VR, eruntque (82.) aequales quoque arcus AV, VR, ideoque arcus AR duplus erit arcûs AV. Igitur latera ſingula SA, AV, VS trianguli AVS aequantur ſingulis lateribus SR, RV, VS trianguli RVS, ac proinde angulus ASV (83.) aequabitur RSV, unde angulus ASR duplus erit anguli ASV; vidimus autem etiam arcum AR duplum eſſe arcûs AV. Ergo ſi arcus AR ſit duplus arcus AV,

etiam

etiam angulus ASR eſt duplus anguli ASV. Simili modo ſi arcus AF ſit triplus arcus AV, angulus ASF triplus oſtendetur anguli ASV. Ergo arcus AV menſura erit anguli ASV; ſi enim ita non foret, duplicato, aut triplicato arcu AV, non duplicaretur, aut triplicaretur angulus ASV. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

90. Igitur tot graduum erit angulus ASV, quot gradus ſunt in intercepto arcu AV.

COROLLARIVM II.

91. Rectus ergo angulus KLA erit graduum 90. Centro enim L deſcripto ſemicirculo AKE, producatur AL ad E, ut novus emergat angulus KLE, aequalis (23.) recto KLA. Cum ergo aequentur anguli KLA, KLE, utique aequabuntur quoque illorum menſurae, nempe (89.) arcus AK, KE, ideoque arcus AK ſemiſſis erit dimidiae circumferentiae AKE; haec autem eſt (36.) graduum 180. Ergo arcus AK erit graduum 90. Fig. 16.

COROLLARIVM III.

92. Cum recti anguli cuiuſvis menſura ſit (91.) graduum 90.; omnes recti anguli aequari debent, & duorum rectorum menſura erit graduum 180., menſura vero rectorum quatuor erit graduum 360.

COROLLARIVM IV.

93. Quia angulus acutus eſt recto (24.) minor, ſicuti viciſſim obtuſus (24.) maior eſt recto; angulus acutus minor erit (91.) gradibus 90. obtuſus vero 90. gradibus maior erit.

COROLLARIVM V.

Fig. 27. 94. Hinc ope ſemicirculi AOL in 180. gradus diviſi, detegentur gradus dati anguli RPQ. Centro enim ſemicirculi ita collocato ſupra verticem P anguli RPQ, ut ſemicirculi radius PL cadat ſupra anguli latus unum PQ, arcus LO cruribus anguli interceptus, oſtendet gradus (89.) dati anguli RPQ.

COROLLARIVM VI.

95. Similiter ad punctum P datae rectae PQ fiet angulus RPQ datorum graduum, ſi centro ſemicirculi ſupra P ita conſtituto, ut eius radius PL cadat ſupra datam rectam PQ, numerentur poſtea dati gradus ab L ad O, notatoque puncto O, per illud traiiciatur PR.

COROLLARIVM VII.

Tab. II. Fig. 1. 96. Demum ſi duae rectae RO, CF ſe ſecuerint in E, anguli ad verticem E oppoſiti erunt aequales. Cum enim ſemicircumferentia CRF aequetur (34) alteri RCO, utrinque ablato arcu CR, reliquus arcus RF aequa-

Digitized by Google

aequalis (68.) erit reliquo CO, & proinde angulus REF aequabitur (89.) CEO. Eodem modo oſtendentur aequales anguli REC, FEO.

SCHOLION I.

97. Pronum ex dictis eſt altitudinum, & diſtantiarum angulos invenire. Eſto imprimis detegendus angulus CAB ſub quo apparet ex A altitudo turris CB. Baculum ſolo infige, ipſique quadrantem AFL in 90. gradus, & minuta diviſum ea lege impone, ut latus unum FA perpendiculare ſit horizonti, planum vero quadrantis dirigatur in altitudinem CB. Deinde regulam AO convertibilem circa A, ita attolle aut deprime, donec oculus centro A admotus, & collimans per utramque dioptram regulae AO, conſpiciat apicem C altitudinis menſurandae. Metire demum quadrantis arcum LO, notamque habebis quantitatem anguli CAB. Quot enim gradus & minuta continet idem arcus LO, tot graduum & minutorum erit altitudinis angulus (89.) CAB. Tab. II. Fig. 2.

Invenietur etiam eodem modo apparens altitudo ſideris dati S. Quadrans LCV in gradus & minuta diviſus ita collocetur, ut filum CE a pondere D extenſum, eius limbum alicubi in E tangat. Deinde circa axem C ita vertatur quadrans, ut oculus in L poſitus, collineanſque per tubum radio LC aptatum, aut etiam per dioptras videat Fig. 3.

ſidus

ſidus S. Menſuretur denique EV arcus, qui indicabit quantitatem anguli SCO, ſub quo apparet ſideris altitudo. Nam cum filum CE perpendiculariter ſecet horizontalem rectam AO, utique ſi productum fuerit uſque ad Zenit Z, prodibit rectus (22.) angulus ZCO, qui idcirco aequalis erit recto (92) alteri LCV. Sed angulus ZCS aequatur (96.) ſibi ad verticem oppoſito LCE; ergo etiam reliquus SCO aequabitur reliquo ECV. Cum ergo arcus EV ſit (89. menſura anguli ECV, metietur quoque angulum SCO.

Eadem quoque methodo opus eſt ad detegendum angulum XAZ, ſub quo apparet
Fig. 4. ex A diſtantia locorum X & Z. Planum ſemicirculi CBD in 180. gradus & minuta diviſi, ſtatue in plano XAZ. Tunc regulam AC dirige verſus X, donec oculus in A poſitus, & collineans per AC videat ſignum X, collimans autem per AB videat ſignum Z. Metire denique BC arcum, qui (89.) magnitudinem referet quaeſiti anguli XAZ.

PROPOSITIO VI.

Tab. II 98. *SI recta RE inſiſtat rectae CF; anguli*
Fig. 1. *REC, REF duobus rectis aequales erunt.*

Centro E, & intervallo EC deſcribatur circulus CRFO. Quia arcus RC menſura eſt (89) anguli ad centrum REC, & arcus

Digitized by Google

RF menſura eſt (89.) anguli REF, liquet duos angulos ſimul ſumptos REC, REF menſurari a dimidia circumferentia CRF; haec vero utpote (36.) graduum 180., eſt duorum (92.) rectorum menſura. Ergo duobus rectis aequales erunt anguli REC, REF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

99. Eodem modo demonſtrabitur, ſi plures rectae SE, RE ad idem punctum inſiſtant eidem rectae CF, effici angulos CES, SER, REF duobus rectis aequales. Tab. II. Fig. 5.

COROLLARIUM II.

100. Duae rectae ſe invicem ſecantes RO, CF efficiunt ad E angulos, qui rectis quatuor ſunt aequales. Nam eadem ratione, qua anguli REC, REF duobus (98.) rectis aequantur, aequales quoque duobus rectis erunt anguli OEC, OEF; igitur omnes anguli ad E poſiti rectis quatuor ſunt aequales. Tab. II. Fig. 1.

COROLLARIUM III.

101. Similiter ſi per idem punctum E traiiciantur rectae quotcumque CF, SQ, RO, omnes anguli ad E poſiti aequales erunt quatuor rectis. Nam eadem ratione, qua anguli CES, SER, REF duobus (99.) rectis aequantur, aequales quoque erunt duobus rectis reliqui CEO, OEQ, QEF; ergo omnes anguli ad E poſiti aequales ſunt quatuor rectis. Tab II. Fig. 5.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM IV.

Tab. II. Fig. 1. 102. Patet etiam quemvis angulum REC duobus rectis eſſe minorem; complet enim duos rectos (98.) cum altero REF.

COROLLVRIVM V.

Tab. II. Fig. 1. 103. Demum ſi duae rectae CE, FE ad idem utrinque punctum rectae RE faciant angulos REC, REF duobus rectis eaquales; eaedem CE, EF unam rectam component, ſeu erunt poſitae in directum. Cum enim anguli REC, REF duobus (*ex hyp.*) rectis aequentur, utique arcus CRF erit (92.) graduum 180., ſeu dimidia (36.) circumferentia. Igitur rectae CE, EF component diametrum, ſeu rectam lineam CEF.

PROPOSITIO VII.

Tab. I. Fig. 17. 18. 19. 104. *SI latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CE trianguli ACE, & angulus ACO ſit maior angulo ACE; etiam latus reliquum AO maius erit reliquo AE.*

Centro C, & intervallo CO deſcribatur circulus OSF, qui ob (*ex hyp.*) aequales CO, CE, tranſibit quoque per punctum E. Producatur AC ad R. Cum recta OC inſiſtat rectae AR, duo anguli ACO, OCR duobus (98.) rectis aequantur. Eamdem ob cauſam duobus rectis aequantur duo anguli ACE,

ACE, ECR. Ergo duo anguli ACO, OCR aequantur duobus angulis ACE, ECR; ſed angulus ACO maior (*ex hyp.*) eſt ACE. Ergo viciſſim reliquus OCR minor (69.) erit reliquo ECR, ideoque arcus RO minor (89.) erit arcu RE. Igitur AO maior (79.) erit AE. Q. E. D.

COROLLARIUM.

105. Igitur ſi arcus circularis AE ſit maior arcu RO, etiam chorda AE maior erit chorda RO. Iunctis enim radiis CA, CE, CR, CO, duo latera AC, CE trianguli EAC aequalia ſunt duobus lateribus RC, CO trianguli ORC; ſed ob arcum AE maiorem (*ex hyp.*) arcu RO, etiam angulus ACE maior eſt (89.) angulo RCO. Igitur chorda AE maior (104.) erit chorda RO. Tab. II. Fig. 6.

PROPOSITIO VIII.

106. *SI latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CS trianguli ACS, & angulus ACO ſit aequalis angulo ACS; etiam reliquum latus AO aequale erit reliquo AS, & ipſa triangula, angulique aequalibus lateribus oppoſiti aequabuntur.* Tab. I. Fig. 17. 18. 19.

Centro C, & intervallo CO deſcribatur circulus OEF, qui ob aequales CO, CS, tranſibit quoque per S, & producatur AC ad R. Cum recta OC inſiſtat rectae AR, duo-

duobus (98.) rectis aequales erunt anguli ACO, OCR. Simili ratiocinio duobus rectis aequales oſtendentur anguli ACS, SCR; igitur anguli ACO, OCR aequabuntur angulis ACS, SCR. Sed angulus ACO aequatur (*ex hyp.*) angulo ACS; ergo reliquus OCR aequabitur (68) reliquo SCR, ideoque arcus OR aequalis erit (89.) arcui SR, & recta AO (77.) aequabitur ipſi AS. Sed etiam reliqua latera AC, CO trianguli ACO aequalia ſunt (*ex hyp.*) lateribus reliquis AC, CS trianguli ACS; ergo (83.) triangula ipſa, angulique lateribus aequalibus oppoſiti aequabuntur. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Tab. II. Fig. 7. 107. Igitur ſi duo arcus AE, RO eiuſdem circuli ſint aequales, aequabuntur quoque chordae AE, RO. Nam latera AC, CE trianguli EAC aequantur lateribus (30.) CR, CO trianguli ORC; ſed ob arcum AE aequalem (*ex hyp.*) arcui RO, etiam angulus ACE aequalis erit (89) angulo RCO. Ergo etiam chorda AE aequabitur (106.) chordae RO.

PROPOSITIO IX.

Tab. I. Fig 17. 18 19. 108. *SI latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CE trianguli ACE, ſed reliquum latus AO ſit maius reliquo AE; etiam angulus ACO maior erit angulo ACE.* An-

Angulus ACO nequit eſſe minor angulo ACE; nam ſi ita, latus AO minus (104.) foret AE, contra hypotheſim. Sed neque idem angulus ACO aequalis eſſe poteſt angulo ACE, quia ſi eſſet, latus AO aequale (106.) foret AE, rurſus contra hypotheſim. Ergo angulus ACO maior erit angulo ACE. Q. E. D.

COROLLARIUM.

109. Igitur ſi in circulo chorda AE ſit maior chorda RO; etiam arcus AE maior erit arcu RO. Nam latera AC, CE trianguli ACE aequantur lateribus OC, CR trianguli RCO; ſed reliquum latus AE maius eſt (*ex hyp.*) reliquo RO. Ergo etiam angulus ACE maior erit angulo (108.) RCO, ſeu arcus AE maior erit (89.) arcu RO. Tab. II. Fig. 6.

PROPOSITIO X.

110. *Bifariam ſecare datam finitam rectam CE.* Tab. II. Fig. 8.

Supra datam rectam CE facto (86.) triangulo aequilatero CFE, ope rectae FA bifariam ſecetur (85.) angulus CFE, quae datam quoque CE bifariam ſecabit in puncto A. Nam latera CF, FA trianguli CAF aequantur (*ex conſtr.*) lateribus EF, FA trianguli EAF, & angulus CFA aequalis eſt (*ex conſtr.*) angulo EFA; ergo etiam

AC

Digitized by Google

AC aequalis (106.) erit AE , atque adeo CE biſecta erit in A . Quod erat faciendum .

COROLLARIVM.

111. Liquet quomodo data recta etiam in 4., 8., 16. &c. aequales partes partiri queat, ſingulas nimirum partes ſemper iterum biſecando.

PROPOSITIO XI.

Tab. II. Fig. 9. 112. *Ex dato puncto C extra rectam indefinitam LH ducere perpendicularem CG.*

Centro C deſcribatur circulus AFE, ſecans datam LH in punctis A, & E. Tum chorda AE bifariam (110.) ſecta in G, iungatur CG, quae perpendicularis erit ad datam rectam LH . Nam ductis CA , CE, tria latera AC, CG, GA trianguli AGC aequantur tribus (*ex conſtr.*) lateribus EC, CG, CE trianguli EGC; ergo (83.) angulus CGA aequabitur CGE , ideoque CG perpendicularis (22.) erit ad chordam AE , vel ad rectam datam LH. Q. E. F.

COROLLARIVM I.

113. Ex huius propoſitionis demonſtratione liquet, radium CO traiectum per punctum medium G chordae AE, perpendiculariter hanc ſecare, ideoque rectum eſſe angulum CGE.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM II.

114. Patet quoque eumdem radium CO biſecare arcum AE in O. Nam in triangulis mutuo aequilateris AGC, EGC aequales (83.) ſunt anguli ACG, ECG, vel anguli ACO, ECO, ideoque aequabuntur quoque (89.) arcus AO, OE.

COROLLARIVM III.

115. Demum ſi duae chordae AE, LO ſe ſecent in puncto G, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt. Si enim ambae biſectae forent in puncto G, utique ductâ ex centro C rectâ CG, recti (113.) eſſent, ſeu aequales (92.) anguli CGE, CGO, quod eſt abſurdum. Tab. II. Fig. 10.

SCHOLION.

116. Ex hac perpendicularium doctrina illi, qui ludo trudiculari operam navant, diſcunt pilam adverſariam repercutiendo amovere. Sed prius tamquam experientia notum praemitti debet, globum nimirùm perfecte elaſticum A, cuiuſmodi ferè ſunt eburnei, oblique occurrentem plano immobili CK in I, ita reſilire verſus C, ut fiat angulus *reflexionis* CIK aequalis *incidentiae* angulo AIG. Hoc poſito, ſit FGKV menſae luſoriae portio, in qua ſit ſphaerularum altera impellenda C, altera qua impellenda eſt, A. Demiſſa ex C ad repagulum GK Tab. II. Fig. 11.

Digitized by Google

perpendiculari (112.) CS, haec producatur ad H, donec SH ipſi CS ſit aequalis. Tum ſphaerula A impellatur verſus H, quae occurrens repagulo in I, reſiliet per IC. Nam latera CS, SI trianguli ICS aequantur lateribus HS, SI trianguli IHS, quare cum (92.) aequentur quoque recti anguli CSI, HSI, etiam (106.) angulus CIS vel CIK, aequabitur HIS. Sed angulus HIS aequatur (96.) angulo AIG ad verticem oppoſito; ergo etiam angulus CIK aequalis erit angulo AIG, & ſphaerula A impulſa iuxta AI, reſiliet per rectam IC, atque amovebit adverſariam pilam C.

PROPOSITIO XII.

Tab. II. Fig. 12. 117. *Omnium rectarum, quae ab aliquo puncto A duci poſſunt ad indefinitam SH, breviſſima eſt perpendicularis AR.*

Ducatur quaecumque alia AC, & producta AR ad F donec ſit RF ipſi AR aequalis, iungatur FC. Latera AR, RC trianguli CAR aequantur lateribus FR, RC trianguli CFR; ergo cum aequales ſint recti anguli ARC, FRC, aequales quoque (106.) erunt AC, CF, ideoque AC cum CF dupla erit AC, ſicuti ob aequales AR, RF, etiam AF dupla erit AR. Porro in triangulo CAF recta AC cum CF eſt (16.) maior AF; ergo etiam dupla AC maior erit du-

dupla AR, ideoque AC maior quoque erit AR. Eodem modo demonſtrabitur, aliam quamvis rectam a puncto A ad rectam SH ductam, perpendiculari AR eſſe maiorem; ergo omnium breviſſima eſt perpendicularis AR. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

118. Contra ſi AR ſit minima omnium, quae ex A ad rectam SH duci queunt, erit quoque perpendicularis ad eamdem SH. Si enim non AR, ſed alia quaepiam AC perpendicularis eſſet ad SH, utique AC, non vero AR eſſet omnium (117.) minima, contra hypotheſim.

COROLLARIVM II.

119. Cum unica tantùm recta omnium minima duci queat ex puncto A ad rectam datam SH; unica quoque ex A ad eamdem SH poterit duci perpendicularis AR.

COROLLARIVM III.

120. Quia diſtantia puncti A a recta SH eſt linea (25.) breviſſima omnium, quae ex A ad eamdem SH duci queunt; ſequitur; perpendicularem AR eſſe diſtantiam (117.) puncti A a recta SH.

COROLLARIVM. IV.

121. Cum altitudo figurae cuiuslibet CFE ſit diſtantia verticis F a baſi CE; liquet, Tab. II. Fig. 8.

Digitized by Google

perpendicularem FA altitudinem eſſe figurae CFE.

Corollarium V.

Tab. II. Fig. 13. 122. Si ex punctis C, & R unius ex parallelis LF demittantur ad aliam ex parallelis AE perpendiculares CO, RH, hae mutuò aequabuntur. Nam diſtantiae punctorum C, & R ab eadem recta AE mutuò (27.) ſunt aequales; ſed perpendiculares CO, RH ſunt (120.) diſtantiae punctorum C, & R ab eadem recta AE. Ergo aequales quoque erunt perpendiculares CO, RH.

Corollarium VI.

Tab. II. Fig. 14. 123. Pronum eſt ergo ducere per punctum R rectam LF parallelam datae AE. Demiſſa (112.) enim RH perpendiculari ad AE, ad hanc ex quolibet puncto O excitetur (87.) perpendicularis OC aequalis RH: dico rectam LF traiectam per C, & R, parallelam eſſe ad AE. Si enim ita non ſit, eſto ad AE parallela alia recta PS, quam ſecet OC in Q. Igitur ob parallelas PS, AE, aequales (122.) erunt perpendiculares QO, RH; ſed RH eſt (*ex conſtr.*) aequalis CO. Ergo etiam aequales erunt QO, CO, quod (72.) eſt abſurdum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIII.

124. *Recta FR, quae per extremitatem C radii CO ducta, eſt eidem perpendicularis; circulum tangit in unico puncto C.* Tab. II. Fig. 15.

Sumpto quolibet puncto H in recta FR, iungatur OH. Quia FR perpendicularis (*ex hyp.*) eſt ad OC, viciſſim quoque OC perpendicularis eſt ad FR, ideoque minima erit (117.) rectarum omnium, quae ex centro O ad rectam FR duci queunt, ac proinde OC, vel OS minor quoque erit OH; ſed recta OS terminatur ad circumferentiae punctum S. Ergo terminus H maioris rectae OH, extra circulum cadet. Simili modo reliqua rectae FR puncta extra circulum cadere demonſtrantur, excepto unico puncto C; ergo recta FR extra circulum tota cadit, ideoque circulum tanget (39.) in unico puncto C. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

125. Novimus inde ad punctum quodvis C ducere tangentem CH. Radius enim OC iungens centrum circuli cum dato puncto C, producatur ut libet ad A, atque ad OA erigatur (87.) ex C perpendicularis CH, quae tangens (124.) quaeſita erit. Tab. II. Fig. 16.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 15. 126. Viciſſim ſi FR circulum tangat in C, recta CO iungens punctum contactus cum centro O, perpendicularis erit ad tangentem FR. Cum enim omnia puncta tangentis FR extra circulum cadant, excepto unico puncto C, utique OC minima erit rectarum omnium ex centro O ad tangentem ductarum, ideoque (118.) perpendicularis erit ad tangentem FR, rectuſque proinde erit angulus OCR.

COROLLARIUM III.

127. Unica ergo FR circulum tanget in puncto C. Si enim etiam recta LE circulum tangeret eodem in puncto C, angulus OCE rectus (126.) foret, ſeu aequalis recto alteri OCR, quod [72.] eſt abſurdum.

COROLLARIUM IV.

128. Igitur ſi ex puncto contactus C agatur alia CE recta, quae cum CR tangente conſtituat angulum quamtumvis tenuem RCE; ea ſecabit (127.) circulum in puncto C, atque adeo eiuſdem aliqua pars CA intra circulum ipſum cadet. Ex quo ſequitur, inter CR tangentem, atque arcum circuli CSA nullam poſſe duci lineam rectam, & angulum, quem arcus circuli efficit cum tangente, minorem eſſe quolibet rectilineo.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM V.

129. Si centris C & D in eadem recta BP ſumptis, deſcribantur duo circuli BFG, BIO; hi mutuo ſe contingent in puncto B. Nam ducta ad BP perpendiculari BA, quae utrumque circulum (124.) tanget in puncto B, ſumatur quod vis aliud punctum G circuli BFG, agaturque DG recta, quae producta occurret circulo BIO in O, & tangenti AB in N. Quia ex puncto D extra centrum circuli BFG ductae ſunt ad eius circumferentiam rectae DG, DB, haec vero tranſit per centrum C, utique DG recta (77.) erit alterâ DB minor. Sed quia punctum D eſt centrum circuli BIO, eſt DB ipſi (30.) DO aequalis; ergo eadem DG erit altera DO minor. Quodvis itaque punctum G circuli BFG erit intra circulum BIO, ac propterea illi circuli ſe mutuò tangent (40.) in puncto B, ubi rectam AB contingunt. Tab. IX. Fig. 1.

SCHOLION I.

130. Hinc ſe ſe prodit diviſibilitas rectae in infinitum, & natura mirabilis infiniti. Nam ſi adhuc infra punctum D centro facto in L deſcribatur circulus BMQ, hic pariter dictos circulos, & communem BA tangentem (129.) in unico puncto B continget, atque adeo rectam DN alicubi ſecabit in M inter O & N. Eadem ratione ſi alii & alii

circuli in infinitum maiori ſemper radio deſcribantur, ipſi in infinitis punctis ſecabunt MN rectam, quae proinde ex infinitis partibus coaleſcit. Ex quibus omnibus etiam liquet angulum contactus, quem nempe facit BA tangens cum arcu circuli BGF, in infinitas partes dividi ab illorum arcubus circulorum, licet ipſe quovis angulo rectilineo (128.) minor ſit, quod maximè eſt mirandum, magnaſque lites omni tempore excitavit.

SCHOLION II.

Tab. II. Fig. 16. 131. Hinc mechanici etiam colligunt, corpus grave urgeri ad terrae centrum, ſi ea ſphaerica ſupponatur. Circulus QCL exponat terraqueum globum, cuius centrum O, & recta AC eam lineam repraeſentet, quam deſcribit grave cadendo, tangens vero FH referat horizontem. Cum experientia plané conſtet, rectam AC a liberé cadente gravi deſcriptam perpendicularem eſſe ad horizontem FH, utique rectus debet eſſe angulus ACH; ſed cum terreſtris quoque radius OC perpendicularis eſſe (126) debeat ad horizontem FH, rectus quoque erit angulus OCH. Ergo duobus rectis aequabuntur anguli ACH, OCH, ideoque (103.) in directum erunt rectae AC, CO, & grave A dirigetur ad centrum telluris O.

CA-

Digitized by Google

CAPVT III.

De Parallelarum, Tangentium, atque Angulorum trianguli proprietatibus.

PROPOSITIO XIV.

132. *SI recta HC ſit perpendicularis uni ex parallelis AE, etiam perpendicularis erit alteri ex parallelis LF.* Tab. II. Fig. 17.

Sumptis aequalibus CS, CV, excitentur (87.) ad AE perpendiculares SI, VG, quae mutuo (122.) aequabuntur, iunganturque CI, CG. Quia latera IS, SC trianguli CIS aequantur lateribus GV, VC trianguli CGV, & rectus angulus ISC aequatur recto GVC, aequabuntur (106.) quoque túm rectae CI, CG, tùm anguli ICS, GCV, qui ablati a rectis, ſeu aequalibus angulis HCS, HCV, relinquent (68.) reſiduos aequales angulos HCI, HCG. Vidimus autem etiam latera IC, CH aequalia eſſe lateribus GC, CH; ergo etiam (106.) angulus CHI aequabitur CHG, ideoque CH perpendicularis eſt ad LF. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

133. *SI recta AE ſecet parallelas AQ, CS, atque ex punctis H, & E ad utram-* Tab. II. Fig. 18.

que

que demittantur perpendiculares HF, EO; angulus OEH aequabitur EHF.

Fiant HL, EG duplae rectarum HF, EO, & iungantur EL, GH. Cum OE perpendicularis ſit ad AQ, perpendicularis (132.) quoque erit ad CS, proindeque (122.) aequabuntur HF, OE, ſicuti (76.) & illarum duplae HL, GE. Iam vero latera EF, FL trianguli FEL aequantur lateribus EF, FH trianguli HEF, & rectus angulus EFL adaequat rectum EFH; igitur EL aequalis (106.) erit EH. Simili ratiocinio etiam recta GH aequalis oſtendetur ipſi EH; ergo mutuò quoque ſunt (75.) aequales EL, GH, ideoque cum etiam rectae HE, EG aequentur rectis HE, HL, aequilatera erunt triangula EHG, LEH, unde (83.) angulus GEH aequabitur EHL, vel OEH ipſi EHF erit aequalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

Tab. II. Fig. 19. 134. *SI recta RE ſecet parallelas AQ, CS in punctis H, & E; erit angulus AHE aequalis alterno HES, & externus angulus RHQ aequabitur interno oppoſito HES, nec non duo interni anguli QHE, HES duobus rectis aequales erunt.*

I. Ex punctis H, & E demittantur ad parallelas perpendiculares HF, EO, quae (133.)

(133.) mutuò erunt aequales. Ergo duo latera EO, EH trianguli EOH aequantur duobus lateribus FH, HE trianguli EFH; ſed etiam angulus OEH aequatur (133.) angulo EHF. Ergo etiam angulus OHE aequalis (106.) erit angulo HEF, ſeu angulus AHE aequabitur alterno angulo HES.

II. Externus angulus RHQ aequatur ſibi ad verticem (96.) oppoſito AHE; ſed ipſi AHE (*num.* I.) aequalis eſt alternus angulus HES. Ergo externus RHQ aequalis quoque erit interno ſibi oppoſito HES.

III. Quia QH inſiſtit rectae RE, duobus rectis aequabuntur (98.) anguli QHE, RHQ; ſed RHQ aequalis eſt (*num* II.) interno HES. Ergo duobus rectis aequabuntur quoque interni anguli QHE, HES. Q. E. D.

COROLLARIUM.

135. Hinc liquet, duos angulos oppoſitos EFC, EAC, nec non E, & C parallelogrammi AEFC mutuò eſſe aequales. Nam quia diagonalis AF ſecat parallelas EF, AC, angulus EFA aequabitur (134.) alterno FAC. Similiter cum eadem diagonalis AF ſecet parallelas EA, FC, angulus AFC aequatur (134.) alterno EAF; igitur totus angulus EFC aequabitur toti EAC. Eodem modo ad invicem aequales demonſtrantur alii duo oppoſiti anguli E, & C. Tab. I. Fig. 12.

PRO.

Digitized by Google

PROPOSITIO XVII.

Tab. II. Fig. 20. 136. *SI circulus, quem tangit recta OR, ſecetur ab alia recta OH; dimidius arcus OH menſura erit anguli ROH.*

Biſectâ (110.) chordâ OH in L, ducatur per L radius CZ, qui perpendicularis (113.) erit ad chordam OH, & biſecabit (114.) arcum OH, agatur CG parallela (123.) ad HO. Quia CL perpendicularis eſt ad HO, perpendicularis (132.) quoque erit ad CG, unde rectus erit angulus LCG. Sed rectus quoque (126.) eſt angulus ROC; ergo angulus ROC aequabitur LCG. Sed quia CO ſecat parallelas GC, OH, angulus HOC aequatur (134.) alterno OCG. Ergo ſi ab angulis aequalibus ROC, LCG auferantur aequales HOC, OCG, aequabuntur reſidui anguli ROH, OCL; ſed arcus OZ, ſeu ſemiſſis arcus OH menſura eſt (89.) anguli OCL. Ergo menſura quoque erit anguli ROH. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Tab. II. Fig. 21. 137. *MEnſura anguli ad circumferentiam poſiti HCF eſt ſemiſſis arcûs HF, cui inſiſtit.*

Ducto ex centro E ad punctum C radio EC, agatur (125.) tangens RA, & intervallo

lo CE deſcribatur circulus SPOE, qui aequalis erit alteri HCF. Cum ſingulos angulos RCH, HCF, FCA metiantur ſinguli (89.) arcus SL, LV, VO, utique tres angulos ſimul RCH, HCF, FCA metietur dimidia circumferentia SLVO, ſeu ſemiſſis circumferentiae circuli HCF; ſed ſemiſſis arcûs CH menſura eſt (136.) anguli RCH, & ſemiſſis arcûs CF menſura (136) eſt anguli FCA. Ergo ſemiſſis reliqui arcûs HF menſura erit reliqui anguli HCF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

138. Hinc ſunt aequales anguli HSE, HRE, HFE eidem arcui HE inſiſtentes; ſingulorum quippe menſura eſt ſemiſſis (137.) arcus HE. Tab. II. Fig. 22.

COROLLARIUM II.

139. Similiter ſi aequales ſint anguli quicumque ad circumferentiam poſiti ASL, SLH, aequales quoque erunt arcus AL, SH, quibus inſiſtunt. & a quorum medietatibus iidem aequales anguli (137.) menſurantur. Tab. II. Fig. 23.

COROLLARIUM III.

140. Angulus quoque ad centrum HEF duplus erit anguli ad circumferentiam poſiti HCF; illius enim menſura eſt totus (89.) arcus HF, cuius ſemiſſis menſura eſt (137.) anguli HCF. Tab. II. Fig. 24.

Digitized by Google

COROLLARIVM IV.

Tab. II. Fig. 24. 141. Angulus item ACF a tangente CA, & ſecante CF comprehenſus, adaequabit angulum CHF poſitum in ſegmento alterno FHC. Vtriuſque enim menſura (137.) eſt ſemiſſis arcûs CF.

COROLLARIVM V.

Tab. II. Fig. 25. 142. Liquet etiam quadrilaterum FRHC inſcriptum circulo, duobus rectis aequales habere oppoſitos angulos R, & C, itemque F, & H. Nam ſemiſſis arcus HCF menſura (137.) eſt anguli R, & ſemiſſis reliqui FRH menſura (137.) eſt anguli C; ergo ſemiſſis circumferentiae HCFR, nempe arcus graduum 180., menſura erit duorum ſimul angulorum R, & C, qui proinde ſimul ſumpti duobus (92.) rectis aequantur. Non aliter diſcurrendum de reliquis F, & H.

SCHOLION.

Tab. II. Fig. 22. 143. Ex primo Corollario huius propoſitionis colligunt Optici, chordam circularem HE oculo ubivis in arcu HSRE poſito, eiuſdem ſemper magnitudinis apparere, quia ſcilicet ubique apparet ſub angulo, qui aequatur angulo HSE. Vnde optima Theatrorum figura eſt ſegmentum circuli, in quo chorda HE Actoribus, arcus vero HSRE Spectatoribus locum praebet.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIX.

144. *Angulus in ſemicirculo rectus eſt; in ſegmento maiori acutus; obtuſus vero in minori.*

Eſto angulus HER inſiſtens dimidiae circumferentiae HSR, quique *angulus in ſemicirculo* etiam dicitur. Itaque cum arcus HSR ſit dimidia circumferentia, ſeu graduum 180, utique eiuſdem ſemiſſis, hoc eſt (137.) menſura anguli HER erit graduum 90.; ſed recti anguli menſura eſt quoque (92.) graduum 90. Igitur rectus etiam erit angulus HER. Tab. II. Fig. 22.

II. Sit deinde ſegmentum HERS ſemicirculo maius, in eoque angulus HES. Quoniam angulus HES eſt in ſegmento maiori, utique arcus HS cui inſiſtit, minor erit dimidiâ circumferentiâ, ſeu arcu graduum 180. Ergo ſemiſſis eiuſdem arcus HS, qui menſura eſt (137.) anguli HES, minor erit gradibus 90.; ſed arcus minor gradibus 90. acutum (93.) angulum dimetitur. Igitur acutus erit angulus HES.

III. Sit demum ſegmentum HEF ſemicirculo minus, in eoque angulus HEF. Quoniam angulus HEF eſt in ſegmento minori, utique arcus HSF cui inſiſtit, maior erit dimidiâ circumferentiâ, ſeu arcu graduum 180. Ergo ſemiſſis arcus HSF, qui (137.) menſura eſt anguli HEF, maior erit gradibus 90.

Digitized by Google

90.; ſed arcus maior gradibus 90. obtuſum angulum (93.) dimetitur. Ergo obtuſus erit angulus HEF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Tab. II. Fig. 26. 145. Ex puncto ergo extremo F rectae RF excitabitur perpendicularis FO, ſi centro quovis L deſcripto per F circulo, datam RF ſecante in puncto E, ducatur diameter ELO, & iungatur FO. Rectus enim erit in ſemicirculo (144.) angulus EFO, ideoque FO perpendicularis erit ad rectam datam RF.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 27. 146. Si ex puncto O ducere oporteat rectam lineam OS, quae in puncto S tangat circulum HSL; tunc ductâ OR ad centrum dati circuli HSL, ſupra illam tamquàm diametrum deſcribatur ſemicirculus OSR priorem ſecans in S, ducaturque OS, quae circulum tanget in puncto S. Ducto enim radio RS, rectus erit (144.) angulus OSR, ideoque OS perpendicularis erit ad radium SR, ac proinde circulum (124.) tanget in puncto S.

COROLLARIUM III.

Tab. III. Fig. 1. 2. 147. Si duo circuli CAE, CFH intra, vel extra ſe tangant, iungens illorum centra per contractum tranſibit. Recta enim AE circulorum centra coniungens, tranſeat,

Digitized by Google

ſeat, ſi fieri poteſt, extra contactum C, & iungantur CA, CE, CF, CH. Quia AE per utriuſque circuli centrum (*ex hyp.*) tranſit, ſemicirculi erunt ACE, FCH, ideoque (144.) recti, aequaleſque erunt anguli ACE, FCH, quod (72. & 102.) eſt abſurdum; namque in figura prima eſſet pars toti aequalis, atque in ſecunda duobus rectis maior eſſet angulus ACH.

COROLLARIVM IV.

148. Quin circuli intra, vel extra ſe tangentes, in uno ſe puncto tangunt. Tangant enim ſe ſe in punctis S, & A, ſitque EF recta iungens eorum centra, quae tranſibit (147.) per contactum A. Quia AF, AE ſunt diametri circulorum, punctumque S utrique circulo (*ex hyp.*) eſt commune, recti (144.) ſeu aequales erunt in ſemicirculo anguli ASF, ASE, quod (72. & 102.) eſt abſurdum; namque in figura tertia eſſet pars toti aequalis, & in figura quarta duobus rectis aequaretur angulus FSE. Tab. III. Fig. 3. 4.

PROPOSITIO XX.

149. *SI recta OE ita ſecet rectas AV, ZF, ut vel angulus ARE aequalis ſit alterno REF, vel externus ORV aequaetur interno oppoſito REF, vel demum duo interni VRE, REF duobus rectis aequentur; parallelae erunt AV, ZF.* Tab. III. Fig. 5.

I. Super RE tamquam diametrum deſcripto circulo RCEL, qui ſecet rectas AV, ZF in punctis L, & C, iungantur LE, RC. Quia aequantur alterni (*ex hyp.*) anguli ARE, REF, aequales quoque erunt (139.) arcus LE, RC, quibus ſi addatur arcus LR, erit arcus ELR aequalis arcui CRL; ſed cum arcus ELR ſit dimidia (*ex conſtr.*) circumferentia, eſſe debet graduum 180. Ergo graduum 180. erit etiam arcus CRL, quare eidem inſiſtens angulus LEC, erit (137.) graduum 90., ſeu rectus; ſed rectus quoque eſt in ſemicirculo (144.) angulus RCE. Ergo rectae RC, LE perpendiculares ſunt ad rectam ZF; ſunt vero etiam (107.) aequales ob nempe aequales arcus RC, LE. Ergo (123.) parallelae erunt AV, ZF.

II. Angulus ARE aequalis eſt (96.) alteri ORV.; ſed etiam internus REF aequatur (*ex hyp.*) externo ORV. Ergo etiam angulus ARE aequabitur REF, ideoque parallelae (*num.* I.) erunt AV, ZF.

III. Anguli ORV, VRE duobus (98.) rectis aequantur; ſed duobus etiam rectis aequantur (*ex hyp.*) anguli VRE, REF. Ergo anguli ORV, VRE aequales ſunt angulis VRE, REF, & utrinque ablato angulo VRE, reliquus ORV aequabitur REF, quare parallelae erunt (*num.* II.) AV, ZF. Q. E. D.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM I.

150. Igitur rectangulum AEFC parallelogrammum erit. Cum enim recti (*ex hyp.*) ſint duo interni anguli A, & E, utique horum ſumma erit duobus rectis aequalis, unde (149.) parallelae erunt EF, AC. Simili ratiocinio demonſtratur, parallelas quoque eſſe EA, FC. Igitur rectangulum AEFC parallelogrammum (48.) erit. Tab. I. Fig. 11.

COROLLARIVM II.

151. Rectae quoque, quae rectas lineas parallelas, & aequales iungunt, ipſae quoque parallelae ſunt, & aequales. Nam ſi EF parallela eſt, & aequalis rectae AC, ductâ AF, anguli alterni EFA, CAF erunt (134.) aequales. Quare in duobus triangulis AEF, ACF latera EF, FA aequalia erunt lateribus AC, AF, & anguli ab his lateribus intercepti aequales; ergo & AE aequalis (106.) erit CF, & angulus EAF aequalis alterno CFA, ideoque rectae AE, CF parallelae (149.) ſunt, & aequales. Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIVM III.

152. Hinc ſi recta AC ſibi ſemper parallela feratur ſuper aliam rectam AE, donec puncto A ad E promoto, recta AC obtineat poſitionem ſibi parallelam EF; hoc motu deſcribi concipietur parallelogrammum AEFC. Rectae enim AE, CF, quae iun-

Digitized by Google

gunt aequales, & parallelas AC, EF, aequales (151.) etiam erunt, & mutuò parallelae; unde quadrilaterum AEFC habebit oppoſita latera parallela, ac proinde (48.) erit parallelogrammum.

PROPOSITIO XXI.

Tab. III. Fig. 6. 153. *Si duae rectae HF, OC ſint parallelae ad eamdem rectam LA; erunt quoque invicem parallelae.*

Rectas HF, LA, OC ſecet tranſverſa SR. Cum recta SR ſecet parallelas (*ex hyp.*) HF, LA, angulus HVE aequalis (134.) erit alterno VEA; ſed propter (*ex hyp.*) parallelas LA, OC, eidem angulo VAE aequatur quoque internus (134.) angulus ERC. Ergo (75.) angulus HVE aequabitur ERC, ſive angulus HVR aequalis erit angulo VRC, ideoque parallelae erunt (149.) HF, OC. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

Tab. III. Fig. 7. 154. *Si recta HA incidens in rectas CR, AE, faciat angulos internos RCA, CAE duobus rectis minores; rectae CR, AE concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores.*

Cum ob angulos internos RCA, CAE duobus rectis (*ex hyp.*) minores, nequeat

(149.)

Digitized by Google

(149.) AE eſſe ad CR parallela, ducatur ad CR parallela (123.) alia recta indefinita AZ. Deinde producta AE indefinitè ad S, ita ſumatur in AZ punctum L, ut ducta LV ad AH parellela, ſit maior AC. Demum ſumpta AF aequali LV, ingatur VF. Quia AF facta eſt aequalis, & parallela ipſi LV, etiam FV aequalis erit, & (151.) parallela ipſi AL; ſed facta eſt CR quoque ipſi AL parallela. Ergo etiam FV parallela (153.) erit ad CR. Eſt igitur CR & parallela ad FV, & incluſa triangulo AFV, unde cum indefinitè produci queat, neceſſario occurret ipſi AE in O; nam ſi ita non eſſet, eadem CR producta vel evaderet per ſibi parallelam FV, quod (28.) eſt abſurdum, vel denuò ſecaret rectam CA, quod (15.) impoſſibile prorſus eſt. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

155. Hinc concurrent duae rectae CR, AE non mutuò parallelae. Nam ductâ per A rectâ AZ parallela ad CR, erunt anguli interni RCA, CAZ duobus rectis aequales; ergo anguli RCA, CAE duobus rectis minores erunt, ideoque (154.) concurrent CR, AE.

COROLLARIVM II.

156. Similiter ſi duae rectae AE, HE convenientes in E, ſecentur utcumque in F, & L, atque ex his punctis erigantur per- Tab. III. Fig. 8.

 pen-

Digitized by Google

pendiculares FC, LS; hae productae neceſſariò ſibi occurrent ad punctum O. Nam iunctâ FL, cum (*ex hyp.*) rectus ſit angulus EFC, minor recto erit angulus LFC. Eandem ob cauſam minor recto erit quoque angulus FLS; igitur FL incidens in rectas FC, LS, facit angulos internos LFC, FLS minores duobus rectis, ideoque rectae FC, LS neceſſariò (154.) ſibi occurrent ad punctum O.

PROPOSITIO XXIII.

Tab. III. Fig. 9. 157. *PER tria data puncta A, E, H non poſita in directum deſcribere circulum AEH.*

Iunctis EH, EA, iiſque (110.) biſectis in L, & F, excitentur ad utramque (87.) perpendiculares LO, FO, quae convenient (156.) ad punctum O: dico hoc eſſe circuli centrum per tria data puncta tranſeuntis. Ducantur OH, OE, OA. Quia latera AF, FO trianguli AOF aequantur (*ex conſtr.*) lateribus EF, FO trianguli EOF, & rectus angulus AFO aequatur recto EFO, etiam OA aequalis erit (106.) OE. Eandem ob cauſam OE aequalis quoque erit OH; ergo aequantur rectae OA, OE, OH, ideoque circulus centro O per H deſcriptus, tranſibit quoque per E, & A. Q. E. F.

Co-

COROLLARIVM I.

158. Ex demoſtratione huius propoſitionis liquet, ſingulas FO, LO, quae ad angulos rectos biſecant chordas EA, EH, tranſire per circuli centrum O; hoc enim in illarum concurſu eſt.

COROLLARIVM II.

159. Quia circulum deſcribere per tria data puncta A, E, H perinde eſt ac circumſcribere circulum triangulo AEH; liquet methodus circulum dato triangulo circumſcribendi.

COROLLARIVM III.

160. Sumptis in circulari arcu AH tribus punctis A, E, H centrum O inveniri, datuſque circulus perfici poteſt.

PROPOSITIO XXIV.

161. *Omnis trianguli RAC tres anguli ſimul ſumpti duobus rectis aequantur.* Tab. III. Fig. 10.

Triangulo RAC circumſcribatur (159.) circulus RAC. Quia ſemiſſis arcûs CR metitur (137.) angulum A, ſemiſſis vero arcûs RA menſura eſt anguli C, nec non ſemiſſis arcûs AC metitur angulum R; liquet ſemiſſem totius circumferentiae RAC, nempe arcum graduum 180. metiri tres ſimul

angulos A, C, R. Sed arcus graduum 180. duos (92.) quoque rectos metitur; ergo duobus rectis aequantur tres ſimul anguli A, C, R. Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

162. Hinc cuiuſvis trianguli tres anguli ſimul ſumpti aequantur tribus angulis cuiuſvis alterius ſimul ſumptis.

COROLLARIUM II.

163. Si ergo duo anguli unius trianguli duobus trianguli alterius ſint aequales; etiam tertius unius tertio alterius aequalis erit.

COROLLARIUM III.

164 Et ſi unius trianguli duo anguli innoteſcant; etiam tertius notus erit.

COROLLARIUM IV.

165. Pariter ſi in triangulo unus angulus rectus ſit, vel obtuſus; reliqui duo acuti erunt.

COROLLVRIUM V.

166. Et ſi in triangulo unus angulus rectus ſit; duo reliqui ſimul aequantur recto.

COROLLARIUM VI.

Tab. III. Fig. 11. 12. 167. Pronum quoque ex dictis eſt inſcribere circulo triangulum ARC, aequiangulum dato ESO. Ducta (125.) enim tangente

te

te FI, fiat angulus IRC aequalis (88.) angulo E, & angulus FRA aequalis alteri O, & iungatur AC: dico triangulum ARC aequiangulum eſſe dato ESO. Quippe angulus A aequatur (141.) angulo IRC; ſed etiam angulus E eidem IRC eſt (*ex conſtr.*) aequalis. Ergo angulus A aequatur etiam angulo E. Pari ratiocinio angulus C oſtendetur aequalis angulo O; ergo etiam tertius ARC aequabitur (163.) tertio S.

SCHOLION I.

168. Ex huius propoſitionis corollario tertio intulit Keplerus dimenſionem Telluris. Tab. III. Fig. 13. Sint B, & C duorum montium vertices ſatis diſſiti inter ſe, ſitque LH arcus Telluris interceptus inter utriuſque montis radices, quem diligenter metiri oportet. Deinde notentur anguli CBA, BCA, quos efficit pendulum per rectas BA, CA ad centrum telluris conſtanter vergens, & linea viſualis BC. Summa horum angulorum auferatur ex gradibus 180. ut notus fiat (164.) angulus BAC, prodeatque arcus interceptus (89.) LH in gradibus & minutis; cumque eius dimenſio per notas quoque menſuras fuerit (*ex hyp.*) deprehenſa, ad eaſdem quoque licebit totius terreſtris ambitûs dimenſionem revocare. Vt autem haec facilius a Tyronibus percipiantur, exemplum a Keplero ipſo allatum referre libet. Eſto B vertex montis, C vero Arcis, diſtent autem

tem

tem haec loca milliaribus quinque Germanicis communibus. Inventus ſit autem angulus CBA grad. 89. min. 46., alter vero BCA grad. 89. min. 55. Igitur min. 19. erit (164.) angulus BAC, ſeu interceptus arcus LH. Si ergo arcus terreſtris LH minutorum 19. valet milliaria quinque Germanica, liquet totum telluris ambitum, qui 21600. minutis conſtat, valere milliaria huiuſmodi 5684.

SCHOLION II.

169. Eadem methodo etiam Ricciolius uſus eſt in Turri Campanaria Mutinenſi, & in vertice montis Paterni, qui Bononia non longe abeſt, intulitque telluris gradum continere Bononienſes paſſus 64363., ac totum proinde telluris ambitum conſtare paſſibus 23169680., hoc eſt milliariis Bononienſibus 23169., ac praeterea paſſus 680. ſed multo accuratius menſuram terrae quaeſiverunt Aſtronomi recentiores, ex quibus conſtat a polo ad aequatorem gradus minui, & viciſſim. Ad uſus tamen praeſentes, ubi tellus pro ſphaerica haberi poteſt, retinebimus cum Caſſino menſuram, quam dat Piccardus, atque adeo tribuemus ſingulis terrae gradibus pedes Pariſienſes 342360., ſeu paſſus 68472., hoc eſt milliaria Pariſienſia 68., ac praeterea paſſus 472. Vnde totus telluris ambitus continebit paſſus 24649920., hoc eſt milliaria Pariſienſia 24649. & praeterea paſſus 920.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXV.

170. *SI in quovis triangulo ACF producatur ad H latus unum AF; externus angulus CFH aequatur duobus ſimul internis oppoſitis A & C.* Tab. III. Fig. 14.

Quia CF inſiſtit rectae AH, duo anguli CFH, CFA aequantur duobus (98.) rectis; ſed duobus rectis aequantur quoque tres (161.) anguli A, C, CFA. Ergo duo anguli CFH, CFA aequantur tribus angulis A, C, CFA, & utrinque ablato angulo CFA, reliquus CFH aequabitur duobus ſimul angulis A, & C. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

171. Ergo externus angulus CFH maior erit interno quovis A, vel C.

COROLLARIUM II.

172. Hinc ſi in triangulo EAH rectus ſit angulus AEH, circulus diametro AH deſcriptus, tranſibit per punctum E. Tranſeat enim, ſi fieri poteſt, per punctum F poſitum ultra E, & iungatur HF. Igitur rectus (144.) erit in ſemicirculo angulus AFH, vel EFH; ſed rectus quoque ponitur angulus AEH. Ergo externus angulus AEH aequabitur interno EFH, quod (171.) eſt abſurdum. Simili ratiocinio oſtendetur, circu- Tab. III. Fig. 15.

culum tranſire non poſſe per aliud punctum R poſitum citra E; ergo tranſibit per punctum E.

Scholion.

Tab. III. Fig. 16. 173. Huius propoſitionis uſus incredibilis dictu eſt. Ex ea Aſtronomi ſolent parallaxim ſideris definire. Sit enim AB quadrans circuli in telluris ſuperficie maximi, cuius centrum T; A locus in ſuperficie, cuius Zenit eſt punctum Z; circulus denique ZER referat Coelum ſtellatum. Eſto Luna in L, quae obſervata a centro telluris T conſpicietur in puncto S, quod *verus* dicitur Lunae *locus*: at ſi e Tulluris ſuperficie in A obſervator Lunam intueatur, illam conſpiciet in puncto E, quod *locus* Lunae *viſus* nuncupatur; & arcus SE, qui differentia eſt inter locum verum, & viſum, Lunae dicitur *parallaxis*, haecque ab Aſtronomis ſequenti methodo invenitur. Trianguli ALT externus angulus ZAL aequalis eſt duobus (170.) internis ATL, ALT, ideoque ſi ex angulo ZAL obſervatione noto, auferatur angulus ATL computatione itidem notus, prodibit angulus ALT, vel huic aequalis (96.) SLE. Iam vero cum puncta L, & T reſpectu immenſae diſtantiae Coeli coincidant, idem erit arcus SE, ſive eius centrum concipiatur eſſe in L, ſive in T, ideoque arcus SE menſura (89.) erit anguli SLE; ergo cum ſupra inventus ſit angulus SLE, no-

notus quoque erit arcus SE, qui parallaxis eſt Lunae.

PROPOSITIO XXVI.

174. *SI triangula AFC, SOH praeter ſingulos angulos A, & C aequales ſingulis S, & H, aequalia quoque habuerint latera AC, SH aequalibus angulis intercepta; etiam latera AF, SO, itemque CF, HO, & ipſa triangula aequabuntur.* Tab. III. Fig. 17. 18.

Sunto, ſi fieri poteſt, inaequalia latera AF, SO, atque ex maiori AF ſumpta AR aequali SO, iungatur CR. Quia latera CA, AR trianguli ARC aequantur (*ex hyp.*) lateribus HS, SO trianguli SOH, & angulus A aequatur (*ex hyp.*) angulo S, etiam (106.) angulus ARC aequabitur ipſi O. Sed in triangulis AFC, SOH ob duos angulos A, & C aequales duobus S, & H, etiam tertius F tertio O eſt (163.) aequalis; ergo angulus ARC (qui externus eſt trianguli RFC) aequabitur interno F, quod (171.) eſt abſurdum. Aequantur ergo latera AF, SO. Eodem ratiocinio aequalia quoque demonſtrantur latera CF, HO; ergo cum aequalia etiam ſupponantur latera reliqua AC, SH, ſequitur (83.) triangula AFC, SOH aequalia mutuo eſſe. Q. E. D.

Co-

Digitized by Google

COROLLORIVM I.

175. Si triangula AFC, SOH praeter angulos A, & C aequales ſingulis S, & H, aequalia quoque habuerint latera FC, OH oppoſita aequalibus angulis A, & S; reliqua quoque aequalia habebunt. Nam ob duos angulos A, & C aequales duobus S, & H, etiam reliquus F aequalis erit reliquo O (163.). Igitur triangula AFC, SOH praeter angulos C, & F aequales ſingulis H, & O, aequalia quoque (*ex hyp.*) habebunt latera CF, HO angulis aequalibus intercepta; ergo (174) reliqua latera, & ipſa triangula aequalia erunt.

COROLLARIVM II.

176. Parallelogrammum AEFC latera oppoſita aequalia habet, atque a diagonali AF in duas aequales partes ſecatur. Nam in triangulis AEF, ACF vidimus (135.) ſingulos angulos EFA, EAF aequales eſſe ſingulis FAC, AFC; ergo cum latus AF angulis aequalibus interceptum, utrique triangulo ſit commune, liquet AE aequalem (174.) fore CF, nec non EF aequari AC, & triangulum AEF aequale eſſe alteri ACF.

Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIVM III.

177. Cum rectangulum ſit quoque (150.) parallelogrammum, ſequitur rectangulum latera oppoſita aequalia habere, atque a diagonali in duas aequales partes ſecari. Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM IV.

178. Hinc ſi per quodlibet punctum F diagonalis parallelogrammi SOAC traiiciantur rectae EV, RG parallelae ad rectas OA, AC; parellelogrammum ORFE aequale erit alteri FVCG. Nam triangulum SOA aequale (176.) eſt triangulo SCA, & triangulum SEF aequatur (176.) triangulo SGF, nec non triangulum FRA adaequat (176.) aliud FVA. Ergo reſiduum ORFE (68.) aequabitur reſiduo FVCG. Tab.III. Fig. 19.

SCHOLION I.

179. Hinc Geodaetae agrum parallelogrammum in duas aequales dividunt partes. Sit CABD ager parallelogrammus, AD eius diagonalis, cuius punctum medium ſit F: dico, quamcumque lineam rectam, ut EG, quae per punctum F tranſit, agrum dividere in duas partes aequales CAEG, GEBD. Nam propter aequales (134.) angulos alternos FAE, FDG, itemque aequales angulos (96.) ad verticem oppoſitos AFE, DFG, & latera FA, FD, quae inter aequales angulos exiſtunt, etiam aequalia; triangulum AFE aequabitur (174.) GFD, additoque utrinque quadrilineo CAFG, quadrilineum CAEG aequale erit triangulo ACD, ſeu dimidio (176.) parallelogrammo CABD, ac proinde etiam quadrilineo GEBD. Tab.III. Fig. 20.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION II.

Tab. IX. Fig. 2. 180. Iidem pariter Geodaetae diſtantiam inacceſſam AE ſequenti methodo adinveniunt. Primo erigunt ſe ſe in A ad angulos rectos cum horizonte, adeo ut oculus ſit in B. Deinde ita deprimunt pileum, qui aliquantulum latus ſit, donec radius viſualis extremitatem pilei radens, incidat in terminum E inacceſſae diſtantiae AE. Demum manente immoto pileo, ad planum aliquod menſurabile ſe convertunt, notantque in illo punctum F, in quo nempe viſualis radius BF per extremitatem pilei tranſiens, occurrit eidem plano. Quia in triangulis BAE, BAF radii viſuales BE, BF conſtituunt (*ex conſtr.*) pares angulos cum BA, & rectus angulus BAE aequatur recto alteri BAF, tandemque BA latus utrique triangulo eſt commune; utique latus quoque AE aequabitur (174) ipſi AF. Igitur ſi AF per menſuram aliquam nota fiat, innoteſcet quoque diſtantia inacceſſa AE.

PROPOSITIO XXVII.

Tab. III. Fig. 10. 181. *In omni triangulo RAC ſi latus AC ſit maius latere AR; etiam angulus R priori oppoſitus, maior erit angulo C, qui opponitur poſteriori. Et contra ſi angulus R maior ſit angulo C; etiam latus AC maius erit latere AR.*

I. Trian-

Digitized by Google

I. Triangulo RAC circumſcribatur (159.) circulus RCA. Quia latus AC eſt maius latere AR, etiam arcus AC ſuperabit (109.) arcum AR; ergo etiam angulus R maior (137.) erit angulo C.

II. Cum angulus R ſit maior angulo C, etiam arcus AC maior (105.) erit arcu AR, ideoque etiam chorda AC maior (137.) erit chorda AR. Igitur latus quoque AC maius erit latere AR. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

182. *SI in triangulo RAC latus AC alteri AR ſit aequale; etiam angulus R priori oppoſitus, aequalis erit angulo C, qui opponitur poſteriori. Et viciſſim ſi angulus R alteri C ſit aequalis; etiam latus AC alteri AR erit aequale.* Tab. III. Fig. 21.

I. Triangulo RAC circumſcribatur circulus RCA. Quia latus AC eſt (*ex hyp.*) aequale AR, arcus quoque AC adaequabit alium (82.) arcum AR, ideoque angulus R aequabitur (137.) ipſi C.

II. Quia angulus R ipſi C eſt (*ex hyp.*) aequalis, utique arcus AC adaequabit (139) arcum AR; ideoque etiam latus AC erit alteri AR (107.) aequale. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

183. Igitur ſi in triangulo iſoſcele ABC Tab. III Fig. 22

 an-

Digitized by Google

angulus A aequis cruribus contentus ſit rectus; ſemirecti erunt reliqui B, & C. Cum enim rectus ſit angulus A, recto aequales (166.) erunt duo ſimul reliqui B, & C; ſed ob aequalia latera AB, AC, aequales quoque (182.) ſunt anguli B, & C. Ergo erunt hi duo anguli ſemirecti.

COROLLARIUM II.

184. Cum in quovis triangulo aequalibus lateribus aequales ſemper (182.) anguli opponantur; liquet, omnes angulos trianguli aequilateri eſſe aequales. Igitur quilibet angulus trianguli aequilateri duorum rectorum (161.) eſt triens, ſeu graduum 60.

COROLLARIUM III.

185. Hinc habetur triſectio recti anguli ABC, ſi ſupra BC fiat triangulum aequilaterum BEC. Nam cum rectus angulus ABC ſit graduum 90., alter vero EBC ſit (184.) graduum 60., patet reliquum ABE fore graduum 30., ſeu trientem recti anguli ABC. Caeterum triſectio alterius anguli praeter rectum a Geometris fruſtra quaeſita eſt per circinum, atque regulam.

Tab. III. Fig. 23.

COROLLARIUM IV.

186. Quoniam in quovis triangulo aequalibus angulis ſemper aequalia latera (182.) opponuntur; liquet, latera omnia trianguli aequianguli aequalia eſſe. Igitur triangulum aequiangulum, erit etiam aequilaterum.

Co-

COROLLARIVM V.

187. Hinc latus AF hexagoni regularis AFVSCQ circulo inſcripti, aequale eſt radio AO. Cum enim arcus AF ſit circumferentiae pars (*ex hyp.*) ſexta, ſeu graduum 60., utique graduum 60. erit quoque (89.) angulus FOA; hic autem ſimul cum reliquis OFA, OAF eſt (161.) graduum 180. Ergo duo ſimul anguli OFA, OAF erunt graduum 120.; ſed cum OF ſit ipſi OA aequalis, angulus OFA aequari debet (182.) alteri OAF. Ergo uterque erit graduum 60., ideoque aequiangulum, ac proinde (186.) aequilaterum erit triangulum FOH. Igitur hexagoni latus AF aequabitur radio OA. Tab. III. Fig. 24.

SCHOLION.

188. Hinc eruitur ratio omnium expeditiſſima Turrium, aliorumque Aedificiorum altitudines menſurandi. Eſto inveſtiganda altitudo turris BA. Baculus DE tantae longitudinis capiatur, ut perpendiculariter terrae infixus, aequet oculi altitudinem. Deinde in recta horizontali AL eum locum eligat obſervator, ut dum humi proſtratus eſt, habetque ad pedum calces baculum DE perpendiculariter terrae infixum, puncta B, & E ſint cum oculo C in eadem recta linea CEB. Menſuretur denique recta AC, qua nempe oculus a turre diſtat: dico, altitudinem AB turris eſſe ipſi AC aequalem. Tab. III. Fig. 22.

Nam in triangulo EDC ob aequales (*ex hyp.*) rectas DE, DC, & rectum angulum EDC, utique ſemirectus (183.) erit angulus DCE; verum angulus DCE idem eſt (19.) cum angulo ACB. Ergo in triangulo BAC ſemirectus erit angulus ACB; eſt autem rectus angulus BAC. Ergo (166.) ſemirectus quoque erit reliquus ABC. Angulus itaque ACB aequabitur ABC, atque adeo recta AC, qua oculus nempe a turre diſtat, aequalis (182.) erit rectae AB, quae illius altitudinem repraeſentat.

PROPOSITIO XXIX.

Tab. III. Fig. 21. 189. *SI ab angulo verticali A trianguli iſoſcelis ARC ducatur ad baſim RC perpendicularis AH; haec biſariam ſecabit baſim in H.*

Cum latus AR alteri AC ſit (*ex hyp.*) aequale, etiam angulus ARH aequabitur (182.) angulo ACH. Igitur in triangulis RAH, CAH anguli ARH, AHR aequales (*ex hyp*) ſunt angulis ACH, AHC; unde cum latera quoque AR, AC aequalibus angulis oppoſita, ſint aequalia; etiam latus RH alteri CH erit (175.) aequale. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Tab. II. Fig. 9. 190. Hinc ſi in circulo FAE demittatur ex centro C ad chordam AE perpendicularis

Digitized by Google

laris CG; haec bifariam ſecabit eamdem chordam in G. Ductis quippe radiis AC, EC, fiet triangulum iſoſcele ACE, cuius vertex eſt centrum C, baſis vero AE; ergo perpendicularis CG biſecabit (189.) chordam AE.

CAPVT III.

De Planometria, ſeu figurarum planarum dimenſione.

PROPOSITIO XXX.

191. *SVper datam rectam CH conſtruere quadratum CALH.* Tab.III. Fig. 25.

Erecta ex C perpendiculari CA, quae datae CH ſit aequalis, ad rectas CH, CA ducantur parallelae AI, HI convenientes in I: dico, quadrilaterum CAIH eſſe quadratum. Cum enim CA, HI, itemque AI, CH ſint inter ſe (*ex conſtr.*) parallelae, parallelogrammum (48.) erit CAIH, ideoque (176.) AI aequalis erit CH; ſed ipſi CH aequatur (*ex conſtr.*) quoque CA, vel (176.) HI. Ergo parallelogrammum CAIH aequilaterum etiam erit. Porro ob parallelas AC, IH, anguli C, & H duobus (134.) rectis aequantur; ergo cum rectus ſit angulus C, rectus quoque erit angulus alter H, recti-

Digitized by Google

que proinde erunt etiam anguli illis (135.) oppoſiti I, & A. Itaque quadrilaterum CAIH aequilaterum, & rectangulum erit, & proinde (45.) quadratum. Q. E. F.

COROLLARIUM.

192. Hinc novimus dato circulo circumſcribere quadratum RCLH. Ductis quippe diametris AO, ES perpendiculariter ſe ſecantibus in circuli centro F, ſupra radios EF, FS conſtruantur (191.) quadrata quatuor FC, FL, FH, FR. Quia duobus (*ex conſtr.*) rectis aequantur anguli CAF, LAF, utique in directum (103.) iacebunt CA, AL, hoc eſt recta erit linea CAL. Eodem modo conſtabit lineas LSH, HOR, REC rectas eſſe; ergo quadrilatera eſt figura RCLH, quae propter rectos (*ex conſtr.*) angulos C, L, H, R, rectangula quoque erit. Iam vero CR, LH diametro AO ſunt (*ex conſtr.*) aequales, ſicuti etiam CL, RH aequantur diametro ES; ergo cum diametri AO, ES ſint aequales, aequabuntur quoque CR, RH, HL, LC, ideoque (45.) quadratum erit RCLH, cuius latera cum perpendiculariter (*ex conſtr.*) inſiſtant radiis EF, AF, SF, OF, utique tangent (124.) circulum in punctis E, A, S, O, & proinde quadratum erit circulo circumſcriptum.

Tab. I. Fig. 16.

PRO

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXI

193. *Area rectanguli CAIH aequalis eſt facto ex eiuſdem baſi CH in altitudinem CA ducta.* Tab. III. Fig. 25. 27.

I. Eſto altitudo CA commenſurabilis baſi CH, & pes unus ſit pars aliquota utriuſque. Contineat altitudo CA tres pedes CS, SF, FA, baſis vero duos CR, RH. Iam vero ſi ex R agatur ad CA parallela RV, atque ex S, & F ducantur ad CH parallelae SO, FL, totum rectangulum CAIH in pedes (191.) quadratos diviſum erit. Horum autem pedum quadratorum ſeries AL, FO, SH ſunt tres, quot nempe ſunt in altitudine CA pedes, & in quavis ſerie ſunt pedes quadrati duo, quot nempe ſunt pedes in baſi CH; ergo in rectangulo CAIH ſex pedes quadrati erunt, quot nempe emergunt ex ductu binarii in ternarium. hoc eſt ex baſi CH in altitudinem CA ductâ. Igitur area rectanguli CAIH aequalis eſt facto ex baſi CH in altitudinem CA ductâ. Fig. 26.

II. Eſto altitudo CA incommenſurabilis baſi CH: dico, aream rectanguli CAIH eſſe aequalem facto ex baſi CH in altitudinem CA ductâ. Sit enim, ſi fieri poteſt, par facto ex baſi CH ductâ in aliam CO rectam, quae minor ſit CA. Hoc poſito, per (111.) continuam biſectionem baſis CH deveniatur Fig. 27.

ad illius aliquotam partem R minorem AO, quae ablata quoties poteſt ab altitudine CA, relinquet AL minorem R, compleaturque rectangulum CLVH, cuius altitudo CL commenſurabilis erit baſi CH; habebit enim cum iſta communem aliquotam partem R. Iam vero cum AL minor (*ex conſtr.*) ſit R, haec autem (*ex conſtr.*) minor AO, erit AL multo minor AO, unde inter A, & O iacebit punctum L, & recta CL maior erit CO. Ergo factum ex baſi CH in altitudinem CL maius erit facto ex eadem baſi CH in altitudinem CO; ſed area rectanguli CLVH aequatur (*num. I.*) facto ex baſi CH in altitudinem CL, & area rectanguli CAIH aequalis eſt (*ex hyp.*) facto ex baſi CH in altitudinem CO. Ergo area CLVH maior erit area CAIH, quod eſt (72.) abſurdum. Non ergo area CAIH aequatur facto ex baſi CH ductâ in rectam CO, quae minor ſit CA. Simili modo oſtendam, eandem aream non eſſe aequalem facto ex baſi CH ductâ in aliam rectam, quae maior ſit CA; ergo aequabitur facto ex baſi CH in altitudinem CA ductâ. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Tab. III. Fig. 25. 194. Cum quadratum CAIH ſit etiam rectangulum, eius quoque area par facto erit ex baſi CH in altitudinem CA, ſeu ob (45.) aequales CH, CA, aequabitur facto ex latere CH per ſeipſum multiplicato. Vnde ſi latus CH ſit trium pedum, novem

pe-

Digitized by Google

pedum quadratorum erit area quadrati CAIH.

SCHOLION.

195. Hinc quoque praxis fluit cubiculorum, aularum, & parietum ſuperficies menſurandi. Cum enim huiuſmodi ſuperficies ut plurimum rectangulae eſſe ſoleant, multiplicatio longitudinis per latitudinem, illarum aream exhibebit.

PROPOSITIO XXXII.

196. *Area cuiuſvis trianguli FAH aequalis eſt facto ex dimidia baſi FH in altitudinem AO ducta.* Tab. IV. Fig. 1. 2.

Compleantur rectangula OASF, OAEH. Triangulum OAH dimidium eſt (177.) rectanguli OAEH, ſicuti & triangulum OAF dimidium eſt rectanguli OASF. Ergo triangulum FAH dimidium eſt rectanguli FSEH; ſed huius area aequalis (193.) eſt facto ex baſi FH in altitudinem SF, vel AO. Ergo etiam area trianguli FAH aequabitur facto ex dimidia baſi FH in altitudinem AO ductâ. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

197. Hinc triangula ABD, AED ſuper eadem baſi AD, vel aequali conſtituta, & habentia aequales altitudines BG, EF, ſunt Tab. IV. Fig. 3.

aequa-

aequalia. Nam factum ex dimidia baſi AD in altitudinem BG, aequari debet facto ex dimidia eadem baſi AD in altitudinem EF, ideoque etiam triangulum ABD alteri AED erit (196.) aequale.

COROLLARIUM II.

198. Igitur triangula ABD, AED ſuper eadem baſi AD, vel aequali, & inter eaſdem parallelas BE, AD conſtituta, aequari debent. Nam ob parallelas BE, AD, aequales (122.) quoque eſſe debent triangulorum altitudines BG, EF, & proinde etiam triangula (197.) aequabuntur.

COROLLARIUM III.

Tab. IV. Fig. 3. 199. Et contra triangula aequalia ABD, AED ſuper eadem baſi AD, vel aequali conſtituta, ſunt quoque inter eaſdem parallelas BE, AD. Cum enim triangulum ABD alteri AED ſit (*ex hyp.*) aequale, factum ex dimidia baſi AD in altitudinem BG aequari debet (196.) facto ex dimidia eadem baſi AD in altitudinem EF. Ergo altitudo BG alteri EF erit aequalis, rectaeque proinde BE, AD erunt (123.) mutuò parallelae.

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 4. 200. Hinc Geodaetae agri triangularis aream bifariam partiri norunt. Baſis BC triangularis agri cuiuslibet BAC, biſecetur (110.) in puncto D: dico, illum bifariam quo-

quoque dividi a rectâ AD, iungente puncta A, & D. Triangula enim BAD, DAC, quae baſes habent aequales BD, DC, & altitudinem communem AG, aequalia (197.) mutuo eſſe debent.

PROPOSITIO XXXIII.

201. *Area cuiuſvis parallelogrammi FARH aequalis eſt facto ex baſi FH in altitudinem AO ductâ.* Tab. IV. Fig. 5.

Ducatur diagonalis AH. Area trianguli FAH dimidia (176.) eſt areae parallelogrammi FARH; ſed area trianguli FAH aequalis (196.) eſt facto ex dimidia baſi FH in altitudinem AO. Ergo area parallelogrammi FARH aequabitur facto ex tota baſi FH in altitudinem AO ductâ. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

202. Igitur parallelogramma ABCD, DCFG ſuper aequales baſes AD, DG conſtituta, & habentia aequales altitudines BE, CH, aequalia mutuò erunt. Eſt enim factum ex AD in BE par facto (*ex hyp.*) ex DG in CH, ideoque parallelogrammum ABCD alteri DCFG erit (201.) aequale. Tab IV. Fig. 6.

COROLLARIUM II.

203. Similiter parallelogramma ABCD, DCFG ſuper aequales baſes AD, DG, &

inter

Digitized by Google

inter eaſdem parallelas BF, AG conſtituta aequari debent. Nam ob parallelas BF AG, parallelogramma aequales (122.) habere debent altitudines BE, CH; quare cum aequales etiam habeant baſes, eadem parallelogramma aequalia (202.) erunt.

COROLLARIUM III.

Tab. IV. Fig. 7. 204. Demum ſi baſis FH trianguli FAH dupla ſit baſeos FS parallelogrammi aeque alti FALS; triangulum parallelogrammo aequale erit. Huius enim area aequalis eſt facto ex baſi FS in (201.) altitudinem AO; area autem trianguli aequalis eſt facto ex dimidia baſi FH, ſeu ex FS in (196.) altitudinem eandem AO. Ergo triangulum parallelogrammo erit aequale.

PROPOSITIO XXXIV.

Tab. IV. Fig. 8. 205. *Area quadrilateri AESC habentis oppoſita latera ES, AC mutuò parallela, aequalis eſt facto ex dimidia horum laterum ſumma in rectam EB, a puncto E ad unum latus AC perpendiculariter ductam.*

Demittatur ex C ad ES perpendicularis CO, quae (132.) perpendicularis quoque erit ad AC, ideoque aequalis (122.) ipſi EB, & ducatur EC. Area trianguli AEC aequalis (196.) eſt facto ex dimidia baſi AC in altitudinem EB. Similiter area trianguli

ECS

Digitized by Google

ECS aequatur (196.) facto ex dimidia baſi ES in altitudinem CO, vel EB; ergo area quadrilateri AESC aequabitur facto ex dimidia laterum parallelorum AS, ES ſumma in altitudinem EB ductâ. Q. E. D.

SCHOLION I.

206. Hinc Geodaetae norunt ſuperficiem irregularem multangulam, ſive perviam, ſive imperviam menſurare. Eſto imprimis menſuranda ſuperficies pervia BCEQHKM. Intra illam ducatur linea, quae poteſt longiſſima BQ, ad quam ſi ex omnibus angulis demittantur perpendiculares CD, EF, HG, KI, ML, ſuperficies data dividetur in triangula rectangula, & in quadrangula, quorum duo ſunt latera parallela. Deinde ſingula (196. & 205.) menſurentur, & ſumma ex omnibus collecta quaeſitam aream exibebit. Tab. IV. Fig. 9.

Si vero impervia ſit ſuperficies menſuranda ABCDE, eidem circumſcribatur rectangulum MIKL, cuius exceſſus ſupra aream, quae menſuranda eſt, dividatur vel in triangula, vel in quadrangula, quae bina habeant latera parallela. Deinde (193.) menſuretur rectangulum, eiuſque (196. & 205.) exceſſus in triangula, & quadrangula reſolutus. Pedes quadrati in exceſſu reperti, auferantur a pedibus quadratis, qui in rectangulo continentur, & reſidui imperviae ſuperficiei aream indicabunt. Tab. IV. Fig. 10.

Digitized by Google

SCHOLION II.

207. Ex hactenus demonſtratis patet methodus agrorum quorumcumque areas detegendi, quas nonnulli dum adductis exemplis illuſtrare nituntur, ob ingentem copiam numerorum obſcurant potius, & intricant. Quamvis enim numeri in ipſo menſionis opere ſint maxime neceſſarii, in docendo tamen claritatis gratiâ iuvat ab iis ſaepius abſtinere.

PROPOSITIO XXXV.

Tab. IV. Fig. 11. 208. *Area cuiuſvis polygoni circulo circumſcripti AFVSC, aequalis eſt facto ex omnium laterum ſemiſumma in radium inſcripti circuli.*

Ductis ex centro O ad ſingulos polygoni angulos rectis OF, OV, OS, OC, OA, agantur ad puncta contactuum radii OL, OK, OT, OZ, OR, qui utpotè normales (126.) ad polygoni latera, altitudines referent triangulorum AOF, FOV, VOS, SOC, COA. Igitur area trianguli AOF aequabitur (196.) facto ex dimidio latere AF in radium OL. Similiter area trianguli FOV aequabitur facto ex dimidio latere FV in radium OK, vel OL, atque ita ſemper. Ergo ſumma omnium triangulorum AOF, FOV, VOS, SOC, COA, ſeu polygonum AFVSC

aream

Digitized by Google

aream habebit aequalem facto ex omnium laterum ſemiſumma in radium OL circuli inſcripti. Q. E. D.

LEMMA.

209. *Circulum inſcribere dato regulari polygono AFVSQ.* Tab. VI. Fig. 12.

Duo proximi anguli A, & Q biſecentur de rectis AO, QO convenientibus in O, demiſſaque ad AQ perpendiculari OR, hac veluti radio deſcribatur circulus, qui inſcriptus erit dato polygono AFVSQ. Nam latera QA, AO trianguli AOQ aequantur lateribus FA, AO trianguli FOA, & angulus QAO eſt (*ex conſtr.*) aequalis alteri FAO; ergo etiam angulus (106.) AQO aequabitur AFO. Sunt vero etiam (*ex hyp.*) aequales toti AQS, AFV; igitur cum AQO dimidius ſit anguli AQS, etiam AFO dimidius erit reliqui AFV, quem proinde biſecat recta OF. Simili ratiocinio conſtabit, rectas OV, OS biſecare angulos FVS, VSQ. Ducantur inſuper ex centro O ad latera perpendiculares OL, OK, OT, OZ. Quia triangula ORA, OLA praeter angulos R, RAO aequales (*ex conſtr.*) angulis L, LAO, habent quoque commune latus OA oppoſitum aequalibus angulis R, & L; ergo habebunt etiam (175.) aequales OR, OL. Pari modo aequales eſſe oſtendentur OL, OK, OT, OZ; ergo circulus centro O per

Digitized by Google

per R deſcriptus, tranſibit quoque per L, K, T, Z. Cum vero facti ſint recti anguli ad puncta R, L, K, T, Z, utique idem circulus tanget (124.) polygoni omnia latera, ideoque eidem erit inſcriptus. Q. E. F.

COROLLARIUM.

210. Hinc circulus radio OA deſcriptus, eidem erit polygono circumſcriptus. Cum enim anguli OAF, OFA ſemiſſes oſtenſi (209.) ſint angulorum aequalium QAF, AFV, utique etiam ipſi aequantur, aequaleſque (181.) erunt OA, OF. Pari modo ipſi OF oſtendentur aequales OV, OS, OQ; igitur circulus radio OA deſcriptus, tranſibit per omnes polygoni angulos, & proinde erit polygono circumſcriptus.

PROPOSITIO XXXVI.

Tab. IV. Fig. 11. 211. *SI cuiuſvis regularis polygoni AFVSQ duo proximi anguli A, & Q biſecentur rectis AO, QO convenientibus in O, atque ex O ad latus unum AQ demittatur perpendicularis OR; polygoni eiuſdem area aequabitur facto ex laterum ſemiſumma in eandem perpendicularem OR.*

Centro O, & intervallo OR deſcribatur circulus RLKTZ, qui (209.) inſcriptus polygono erit, ideoque polygonum erit eidem circulo circumſcriptum; ſed aerea polygoni cir-

circulo circumſcripti aequalis (208.) ex facto ex omnium laterum ſemiſumma in eiuſdem circuli radium. Ergo etiam area polygoni AFVSQ aequalis eſt facto ex omnium laterum ſemiſumma in perpendicularem OR, quae radius eſt inſcripti circuli RLKTZ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

212. *Area circuli eaqualis eſt facto ex dimidia circumferentia in radium ducta*. Tab. IV. Fig. 13.

Concipiatur circulo circumſcriptum regulare polygonum AFLQΓ, quod quidem inſcripto circulo maius erit; ſi tamen angulis reſectis, fiat novum polygonum CEHIOPRSVX, cuius duplo plura ſint latera, hoc ſane minus excedet inſcriptum circulum, quam praecedens. Ergo quo magis numerus laterum polygoni augetur, eo minus viciſſim area polygoni circularem excedet; unde ſi numerus laterum polygoni evadat infinitus, ſeu maior quovis numero dato, minor viciſſim quovis aſſignabili, atque idcirco contemnendus evadet polygoni areae ſupra circularem exceſſus. Ergo polygoni huius area pro circulari, & ſumma eiuſdem laterum pro circumferentia inſcripti circuli ſumi poteſt; ſed polygoni eiuſdem area aequalis eſt (208.) facto ex eius laterum ſemiſumma in radium inſcripti circuli. Ergo etiam area circuli eidem

Digitized by Google

facto erit aequalis, unde cum laterum ſemiſumma pro dimidia circumferentia circuli ſumi poſſit, liquet aream circularem aequalem eſſe facto ex dimidia circumferentia in radium ductâ. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

213. Quia triangulum rectilineum habens pro baſi lineam aequalem circumferentiae, pro altitudine autem radium, aream habet aequalem (196.) facto ex dimidia circumferentia in radium ductâ; ſequitur, trianguli huius aream circulari aequalem eſſe.

SCHOLION.

214. Nota ergo foret circuli area, ſeu quod idem eſt, haberetur circuli *quadratura*, ſi tam eiuſdem diameter, quam circumferentia finitis poſſet numeris exiberi. Verum enim vero utut aetate hac noſtrâ ars inveniendi egregie promota fuerit, veram nihilominus circumferentiae longitudinem in finitis numeris hactenus nemo dedit. *Archimedes* tamen omnium primus fuit, qui polygona 96. laterum circulo inſcripta, & circumſcripta adhibendo, propè veram circumferentiae longitudinem adinvenit, oſtenditque nimirum, ſi in ſeptem aequales partes diameter circuli dividatur, harum viginti duas in circumferentia circuli proximè contineri.

PARS

PARS SECVNDA

DE RECTARVM, ET FIGVRARVM PLANARVM MVTVA PROPORTIONE.

CAPVT I.

De principiis proportionum.

DEFINITIO I.

215. MAgnitudines *homogeneae*, ſive *eiuſdem generis* illae ſunt, quae eundem habent numerum dimenſionum. Ita ſunt homogeneae duae lineae; quippe ambae unica tantum ſunt praeditae dimenſione. Idem de duabus ſuperficiebus, & de duobus ſolidis eſt dicendum.

DEFINITIO II.

216. Magnitudines *haeterogeae*, ſive *diverſi generis* ſunt, quae non eundem habent numerum dimenſionum. Ita linea heterogenea eſt tam ſuperficiei, quam ſolido; quippe una tantum lineae dimenſio eſt, duplex vero ſuperficiei, & triplex ſolidi.

Digitized by Google

DEFINITIO III.

217. Si duae magnitudines eiuſdem generis in ordine ad quantitatem mutuò comparentur; relatio quae oritur, *Ratio* dici ſolet. *Geometrica* eſt, ſi in ea comparatione ſpectemus quomodo una magnitudo contineat alteram; *Arithmetica* vero, ſi exceſſum tantummodo unius ſupra alteram conſideremus. Ita ſi referas magnitudinem 10. pedum ad alteram pedum 5., quatenus prior magnitudo ſecundam bis continet; geometrica erit ratio. At ſi referas magnitudinem 10. pedum ad alteram 5. pedum, quatenus prima excedit alteram 5. pedibus; arithmetica ratio erit. *Rationis* autem nomine, niſi quid addatur, geometrica ſemper venit.

DEFINITIO IV.

218. In omni ratione magnitudo, quae ad aliam refertur, dicitur *antecedens*, ea vero, ad quam refertur, *conſequens* appellatur. Antecedens vero & conſequens rationis *termini* dici ſolent.

DEFINITIO V.

219. Ratio *aequalitatis* eſt, cuius antecedens conſequenti ſuo aequatur; veluti eſt ratio 3. ad 3. Si vero antecedens conſequenti ſuo ſit inaequalis, ratio *inaequalitatis* aſſolet nuncupari; cuiuſmodi eſt ratio 6. ad 3., aut etiam ratio 3. ad 6.

DE-

Digitized by Google

DEFINITIO VI.

220. Ratio *maioris inaequalitatis* eſt illa, cuius antecedens conſequente ſuo eſt maius, veluti eſt ratio 6. ad 3. Ratio autem *minoris inaequalitatis* eſt, cuius antecedens conſequente ſuo eſt minus, veluti eſt ratio 3. ad 6.

DEFINITIO VII.

221. Duae rationes dicuntur *ſimiles*, aut *aequales*, ſive *eaedem*, quando antecedens unius aeque, ſive eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minus) continet ſuum conſequens, aut continetur in illo, quo alterum antecedens continet ſuum conſequens, aut continetur in illo. Ita ratio 6. ad 3. eadem erit cum ratione 4. ad 2.; quippe antecedens primum 6. eodem modo continet conſequens ſuum 3., quo antecedens alterum 4. continet conſequens ſuum 2.

COROLLARIUM I.

222. Vt ergo duae rationes aequales ſint, aut eaedem, non opere pretium eſt, ut iiſdem antecedentibus, & conſequentibus exprimantur, ſed opus eſt tantum, ut antecedentia aeque, ſive eodem modo conſequentia ſua contineant, vel in iiſdem contineantur.

Digitized by Google

COROLLARIVM II.

Tab. IV. Fig. 14. 223. Liquet ſimiliter, aequales magnitudines A & H habere eandem rationem ad tertiam C. Antecedentia enim aequalia A & H aeque, ſive eodem modo continent commune conſequens C.

COROLLARIVM III.

Tab. IV. Fig. 14. 224. Viciſſim tertia C eandem habebit rationem ad aequales magnitudines A & H. Commune quippe antecedens C aeque, ſive eodem modo continetur in aequalibus conſequentibus A & H.

COROLLARIVM IV.

Tab. IV. Fig. 14. 225. Pariter ſi magnitudines A & H eandem habuerint rationem ad tertiam C; aequales invicem erunt. Cum enim ratio A ad C eadem ſit cum (*ex hyp.*) ratione H ad C, utique (221.) antecedens A aeque, ſive eodem modo continebit conſequens ſuum C, quo antecedens alterum H continet conſequens ſuum C; aequales itaque erunt magnitudines A, & H.

COROLLARIVM V.

Tab. IV. Fig. 15. 226. Demum ſi duae rationes A ad C, atque R ad F ſint aequales tertiae rationi E ad H; etiam invicem aequabuntur. Nam quia ratio A ad C aequalis eſt (*ex hyp.*) rationi E ad H, utique (221.) eodem modo

Digitized by Google

do A continebit C, quo E continet H. Pariter cum ratio R ad F aequetur (*ex hyp.*) rationi E ad H, eodem modo (221.) R continebit F, quo E continet H. Ergo etiam A eodem modo continebit C, quo R continet F, hoc eſt (221.) ratio A ad C aequabitur rationi R ad F.

DEFINITIO VIII.

227. Si duae rationes maioris inaequalitatis mutuò comparentur; ea ratio dicitur *maior*, cuius antecedens ſaepius continet ſuum conſequens, quam alterum antecedens contineat ſuum. Ita ratio 8. ad 2. maior eſt ratione 6. ad 3.; nam 8. quater continet 2., cum 6. bis tantum contineat 3.

COROLLARIUM I.

228. Duarum ergo inaequalium magnitudinum A, & H maior A maiorem habebit rationem ad tertiam C, quam minor H habeat ad eandem C. Maior quippe A ſaepius continebit tertiam C, quam ipſam contineat minor H. Tab. IV. Fig. 16.

COROLLARIUM II.

229. Viciſſim ſi ratio A ad C maior ſit ratione H ad C; erit A maior H. Saepius (227.) enim A quam H continebit tertium C, atque adeo A erit maior H.

Digitized by Google

DEFINITIO IX.

230. Si duae rationes minoris inaequalitatis invicem comparentur; illa ratio dicitur *maior*, cuius antecedens minus continetur in conſequente ſuo, quam antecedens alterum in ſuo. Ita ratio 3. ad 6. maior erit ratione 2. ad 8., nam 3. bis tantum continetur in 6., cum 2. in 8. quater contineatur.

COROLLORIVM I.

Tab IV. Fig. 17. 231. Hinc duarum inaequalium magnitudinum A, & H, maior A maiorem habebit rationem ad tertiam C, quam minor H habeat ad eandem C. Nam A minus quam H continebitur in tertia C.

COROLLARIVM II.

Tab. IV. Fig. 17. 232. Similiter ſi ratio A ad C maior ſit ratione H ad C; erit A minor H. Minus enim A quam H continebitur (230.) in tertia C, ideoque A maior erit H.

DEFINITIO X.

233. Si duae rationes quae comparantur, mutuò ſint aequales, oritur *proportio*. Ita cum ratio 6. ad 3. aequetur (221.) rationi 4. ad 2.; in *proportione*, ſive *propotionales* dicentur eſſe 6., 3., 4., & 2., ſive dicetur 6. eſſe ad 3., ut 4. ad 2.

De-

Digitized by Google

DEFINITIO XI.

234. Si duae rationes aequales quae invicem comparantur, ſint huiuſmodi, ut conſequens primae idem ſit cum antecedente ſecundae; proportio quae oritur, *continua* appellatur, terminuſque bis repetitus dicitur *medius proportionalis*. Ita quia ratio 2. ad 4. aequatur rationi 4. ad 8., & 4. qui conſequens eſt primae, eſt quoque antecedens ſecundae; utique in *proportione continua*, ſive *continue proportionales* dicentur eſſe 2., 4., & 8., ac medius proportionalis erit 4.

DEFINITIO XII.

235. *Ratio compoſita* ex pluribus rationibus illa dicitur, quam habet productum ex omnibus illarum rationum antecedentibus ad productum ex omnibus conſequentibus earundem. Ita ratio compoſita ex rationibus 3. ad 5., & 4. ad 6., eſt illa quam habet productum antecedentium 3., & 4. nempe 12., ad productum conſequentium 5., & 6., nempe 30.

DEFINITIO XIII.

236. Si duae rationes componentes aequentur; ratio ex illis compoſita dicitur *duplicata* alterutrius componentium. Ita quia ex duabus rationibus aequalibus 6. ad 3., & 4. ad 2. componitur (235.) ratio 24. ad 6., haec dicetur duplicata rationis 6. ad 3., vel etiam 4. ad 2.

DE-

DEFINITIO XIV.

237. Si vero tres rationes componentes aequentur, ratio compoſita inde orta, dicitur *triplicata* cuiuslibet componentium. Ita cum ex tribus rationibus aequalibus 6. ad 3., 4. ad 2., & 10. ad 5 componatur (235.) ratio 240. ad 30., haec dicetur triplicata rationis 6. ad 3., vel 4. ad 2., aut 10. ad 5.

DEFINITIO XV.

Tab. IV. Fig. 18. 19. 238. *Figurae ſimiles* ſunt, ſi ſinguli anguli unius ſingulis alterius angulis ſint aequales, & latera *homologa*, ſeu angulis aequalibus oppoſita vel intercepta, fuerint proportionalia. Ita ſimiles erunt figurae CAF, ORE, ſi ſinguli anguli C, A, F aequentur ſingulis O, R, E, & AC ſit ad RO, ut CF ad OE, & CF ad OE, ut FA ad ER, & FA ad ER, ut AC ad RO. Eodem modo explicabitur ſimilitudo aliarum omnium figurarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. IV. Fig. 20. 239. Figurae L & V dicuntur habere latera *reciproce proportionalia*, ſi latus AS figurae L fuerit ad latus SC figurae V, ut huius latus SO ad illius latus SH.

DEFINITIO XVII.

Tab. IV. Fig. 21. 240. Rectangulum *ſub rectis* AS, SC, vel ſimpliciter *rectangulum* ASC eſt illud, quod con-

continetur ſub rectis AS, SC ad angulum rectum iunctis. Similiter cum dicitur *rectangulum ſub rectis* AC, CS, aut *rectangulum* ACS, intelligitur rectangulum, quod continetur ſub rectis AC, & CS ad rectum angulum conſtitutis.

CAPUT II.

De nonnullis Parallelogrammorum, & Rectangulorum ſymptomatis, deque Regulis proportionum.

PROPOSITIO I.

241. *Parallelogramma quaevis aequè alta CBIA, AIEF ſunt, ut baſes CA, AF.* Tab. VI. Fig. 22. 23.

I. Sunto commenſurabiles baſes CA, AF, atque AS ſit pars aliquota utriuſque, quae exempli gratia contineatur bis in AF, ter vero in CA. Ex puncto S agatur ad FE parallela SO. Cum CA ſit tripla AS, parallelogrammum CBIA tria parallelogramma continebit, quorum ſingula (203.) aequantur AIOS, ideoque parallelogrammum CBIA triplum erit alterius AIOS. Similiter ob AF duplam AS, parallelogrammum AIEF duplum erit eiuſdem AIOS; ergo (221.) parallelogrammum CBIA erit ad aliud AIEF, ut 3. ad 2. Sed etiam (*ex hyp.*) baſis CA Fig. 22.

eſt

Digitized by Google

eſt ad baſim AF, ut 3. ad 2. Ergo (226.) parallelogrammum CBIA erit ad aliud AIEF, ut baſis CA ad baſim AF.

Fig. 23. II. Sunto incommenſurabiles baſes CA, AF, ponaturque, ſi fieri poteſt, parallelogrammum CBIA eſſe ad aliud AIEF, ut baſis CA ad aliam AV rectam, minorem ſcilicet baſi AF. Per continuam biſectionem baſis CA deveniatur ad eiuſdem aliquotam partem R rectâ VF minorem, quae proinde ablata quoties poteſt ab AF, relinquet ſeipſa minorem SF. Hoc poſito, ſi ex S agatur ad FE parallela SO, prodibunt aequè alta parallelogramma CBIA, AIOS, quorum commenſurabiles erunt baſes CA, AS, utpote habentes communem aliquotam partem R. Quia SF minor (*ex conſtr.*) eſt R, haec autem (*ex conſtr.*) minor VF; erit SF multò minor VF, ideoque punctum S cadet inter V, & F, & recta AV minor erit AS. Itaque ratio CA ad AV maior (227.) erit ratione eiuſdem CA ad AS; ſed ratio CA ad AV eadem eſt cum ratione (*ex hyp.*) parallelogrammi CBIA ad aliud AIEF, & ratio CA ad AS eadem eſt cum ratione (*num. I.*) parallelogrammi CBIA ad aliud AIOS. Ergo ratio parallelogrammi CBIA ad aliud AIEF maior erit ratione eiuſdem parallelogrammi CBIA ad aliud AIOS, & proinde parallelogrammum CBIA ſaepius continebit AIEF, quàm contineat (227.) alterum AIOS, ideoque parallelogrammum AIEF minus erit altero

Digitized by Google

tero AIOS, quod eſt abſurdum. Pari ratiocinio oſtendetur parallelogrammum CBIA non eſſe ad aliud AIEF, ut baſis CA ad aliam rectam maiorem baſi AF; ergo parallelogrammum CBIA erit ad aliud AIEF, ut baſis CA ad baſim AF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

242. Cum quaevis triangula CIH, HIF dimidia (176) ſint aequè altorum parallelogrammorum CAIH, HIEF; utique etiam triangulum CIH erit ad aequè altum triangulum HIF, ut baſis CH ad baſim HF. Tab. IV. Fig. 24.

COROLLARIUM II.

243. Quia etiam rectangula L, & V ſunt (150.) parallelogramma; patet, rectangulum L eſſe ad aliud aequè altum V, ut baſis CH ad baſim HF. Tab. IV. Fig. 25.

PROPOSITIO II.

244. *Parallelogramma, & triangula aequalia L, & V, quae unum angulum AFH uni OFC habent aequalem; etiam latera circa aequales angulos habent reciprocè proportionalia, hoc eſt etiam AF eſt ad FC, ut OF ad FH. Et ſi latera ſic habeant reciprocè, parallelogramma, & triangula erunt aequalia.* Tab. IV. Fig. 26. 27.

I. Ponantur in directum rectae AF, FC.

Quo-

Quoniam recta HF inſiſtit rectae AC, utique anguli AFH, HFC duobus rectis aequari (98.) debent; ſed angulus AFH (*ex hyp.*) aequatur alteri OFC. Ergo etiam duobus rectis aequabuntur anguli OFC, HFC, atque adeo etiam rectae OF, FH erunt (103.) poſitae in directum. Producantur in parallelogrammis rectae SH, PC donec conveniant ad punctum E; at in triangulis iungatur tantùm HC. Quoniam parallelogrammum, & triangulum L alteri V eſt (*ex hyp.*) aequale, erit (223.) L ad R, ut V ad R; ſed (241. *&* 242.) L eſt ad R, ut AF ad FC, & V eſt ad R, ut OF ad FH. Ergo etiam AF erit ad FC, ut OF ad FH.

II. Parallelogrammum, & triangulum L eſt ad aliud aequè altum R, ut (241. *&* 242.) AF ad FC. Similiter parallelogrammum, & triangulum V eſt ad idem aequè altum R, ut OF ad FH; ſed (*ex hyp.*) AF eſt ad FC, ut OF ad FH. Ergo etiam L erit ad R, ut V ad R, ideoque aequantur (225.) parallelogramma, & triangula L, & V. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Tab. V. Fig. 1.2. 245. *SI quatuor rectae AS, SC, OS, SH fuerint proportionales, hoc eſt ſi AS ſit ad SC, ut OS ad SH; rectangulum L ſub extremis AS, SH aequale eſt rectangulo V ſub mediis SC, OS. Et ſi rectangulum L ſub extremis*

mis aequetur rectangulo V ſub mediis; erunt illae quatuor rectae proportionales.

I. Parallelogramma, quae circa aequales angulos habent latera reciprocè proportionalia, ſunt (244.) aequalia inter ſe; ſed rectangula L, & V ſunt (150.) parallelogramma, quae circa rectos, ſeu aequales angulos ASH, OSC habent latera reciprocè proportionalia, quippe (*ex hyp.*) AS eſt ad SC, ut reciprocè OS ad SH. Ergo rectangula L, & V aequalia erunt.

II. Cum aequalia ſint (*ex hyp.*) rectangula, ſeu (150) parallelogramma L, & V, habeantque rectos, ſeu aequales (*ex hyp.*) angulos ASH, OSC, utique etiam latera circa aequales angulos habebunt (244) reciprocè proportionalia. Igitur AS erit ad SC, ut SO ad SH. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

246. Hinc ſi quatuor numeri fuerint proportionales, factum extremorum aequabitur (245) facto ex mediis. Ita cum ſit 2. ad 4., ut 8. ad 16., factum extremorum 2. & 16., nempe 32. aequabitur facto ex mediis 4. & 8., nempe 32.

COROLLARIUM II.

247. Quare datis tribus numeris quibuſcumque veluti 2. 4., & 8., invenietur quartus proportionalis 16., ſi factum ex mediis

4., &

Digitized by Google

4., & 8. per primum 2. dividatur. Cum enim factum ſub mediis aequetur facto primi in quartum (246.) ducti, utique ſi factum ſub mediis per primum numerum dividatur, in quoto quartus prodibit.

COROLLARIVM III.

Tab. V. Fig. 3. 248. Similiter ſi tres rectae A, S, H fuerint proportionales, hoc eſt ſi A ſit ad S, ut eadem S ad H; rectangulum ſub extremis A & H aequabitur quadrato mediae S. Eſto enim O aequalis mediae S. Cum A ſit ad S, ut (*ex hyp.*) eadem S ad H, etiam A erit ad S, ut O ad H, ideoque rectangulum ſub extremis A, & H aequabitur rectangulo (245.) ſub aequalibus mediis S, & O, ſeu quadrato mediae S.

COROLLARIVM IV.

249. Et contra ſi rectangulum ſub extremis A, & H aequale ſit quadrato mediae S; tres rectae A, S, H erunt proportionales. Eſto enim O aequalis mediae S. Cum rectangulum ſub A, & H aequale ſit (*ex hyp.*) quadrato mediae S, idem rectangulum etiam aequale (*ex conſtr.*) erit rectangulo ſub S, & O, ideoque (245.) A erit ad S, ut O ad H. Ergo cum S, & O ſint aequales, etiam A erit ad S, ut eadem S ad H.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM V.

250. Si ergo tres numeri fuerint continuè proportionales; factum extremorum aequabitur quadrato medii. Ita cum 4. ſit ad 8., ut 8. ad 16., factum extremorum 4. & 16., nempe 64. aequabitur quadrato mediae 8., nimirum 64.

SCHOLION I.

251. Ex corollario ſecundo huius propoſitionis colligunt Geographi terreſtris diametri magnitudinem. Cum enim circumferentia contineat vigintiduas illarum partium, quarum ſeptem tantum habet (214.) diameter, erit circumferentia terrae ad eius diametrum, ut 22. ad 7. Eſt autem (169.) terrae circumferentia paſſuum Pariſienſium 24649920.; igitur ſi ex datis tribus numeris 22., 7., & 24649920., inveniatur quartus propotionalis, prodibit terrae diameter, qui erit paſſuum Pariſienſium 7843156., dabitque proinde milliaria Pariſienſia 7843., ac praeterea paſſus 156.

SCHOLION II.

252. Ex hac quoque propoſitione octo *Regulae* derivantur, quibus tota fermè innixa eſt Geometrarum Dialectica.

Digitized by Google

REGULA I.

Tab. V. Fig. 2. 253. *SI prima AS ſit ad ſecundam SC, ut tertia OS ad quartam SH; etiam* invertendo *ſecunda SC erit ad primam AS, ut quarta SH ad tertiam OS.*

Quia AS eſt ad SC, ut OS ad SH, rectangulum L ſub extremis AS, SH aequabitur (245.) rectangulo V ſub mediis SC, OS. Itaque (224.) rectangulum R erit ad L, ut idem R ad V; ſed R eſt ad L, ut (241.) SC ad AS, & R eſt ad V, ut (241.) SH ad OS. Ergo etiam SC erit ad AS, ut SH ad OS. Q. E. D.

REGULA II.

Tab. V. Fig. 2. 254. *SI prima AS ſit ad ſecundam SO, ut tertia SC ad quartam SH; etiam* permutando *prima AS erit ad tertiam SC, ut ſecunda SO ad quartam SH.*

Quia (*ex hyp.*) AS eſt ad SO, ut SC ad SH, rectangulum L ſub extremis AS, SH aequabitur (245.) rectangulo V ſub mediis SO, SC. Itaque L erit ad R, ut (223.) V ad idem R; ſed L eſt ad R, ut (241.) AS ad SC, & V eſt ad R, ut (241.) OS ad SH. Ergo etiam AS erit ad SC, ut OS ad SH. Q. E. D.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM.

255. Si fuerit prima A ad ſecundam C, ut tertia E ad quartam F, ſitque prima A aequalis tertiae E; etiam ſecunda C aequabitur quartae F. Cum enim A (*ex hyp.*) ſit ad C, ut E ad F, etiam (254.) permutando A erit ad E, ut C ad F; ſed A ipſi E eſt (*ex hyp.*) aequalis. Ergo & C aequabitur ipſi F. Tab. V. Fig. 4.

REGVLA III.

256. *SI prima A ſit ad ſecundam C, ut prima F ad ſecundam H, & ſecunda C ad tertiam E, ut ſecunda H ad tertiam R, & ſic deinceps; etiam* ex aequo *prima A erit ad ultimam E, ut prima F ad ultimam R.* Tab. V. Fig. 5.

Cum A ſit ad C, ut (*ex hyp.*) F ad H, etiam (254) permutando A erit ad F, ut C ad H. Similiter cum C ſit (*ex hyp.*) ad E, ut H ad R, etiam (254.) permutando C erit ad H, ut E ad R. Itaque A eſt ad F, ut C ad H, & E eſt ad R, ut C ad H; ergo (226) etiam A erit ad F, ut E ad R, & permutando A erit ad E, ut F ad R. Q. E. D.

REGVLA IV.

257. *SI fuerit ut prima A ad ſecundam C, ita prima F ad ſecundam H, & ut* Tab. V. Fig. 6.

G 2 ſecun-

Digitized by Google

ſecunda C ad tertiam E, ita tertia quaepiam O ad primam F; *etiam* ex aequo perturbatè *prima A erit ad tertiam E, ut tertia O ad ſecundam H.*

Vt C eſt ad E, ita poteſt H eſſe ad aliquam quampiam R. Iam quia ut C ad E, ſic O eſt (*ex hyp.*) ad F, & ut eadem C ad E, ſic (*ex conſtr.*) H eſt ad R; erit (226.) O ad F, ut H ad R. Igitur permutando O erit ad H, ut F ad R. Rurſus quia A eſt ad C, ut (*ex hyp.*) F ad H, & C eſt ad E, ut (*ex conſtr.*) H ad R; etiam ex aequo (256.) A erit ad E, ut F ad R; ſed vidimus O eſſe ad H, ut F ad R. Ergo (226.) etiam A erit ad E, ut O ad H. Q. E. D.

REGVLA V.

Tab. V. Fig. 2. 258. S*I prima AS ſit ad ſecundam SC, ut tertia OS ad quartam SH; etiam* componendo *prima AS ſimul cum ſecunda SC erit ad ſecundam SC, ut tertia OS ſimul cum quarta SH eſt ad quartam SH, ſive AC erit ad CS, ut OH ad HS.*

Cum AS ſit ad SC, ut (*ex hyp.*) OS ad SH; rectangulum L alteri V erit (245.) aequale, additoque utrinque R, rectangulum LR aequabitur ipſi VR. Igitur (223.) LR erit ad R, ut VR ad idem R; ſed LR eſt ad R, ut (241.) AC ad CS, & VR eſt ad R, ut

R, ut (241) OH ad HS. Ergo etiam AC erit ad CS, ut OH ad HS. Q. E. D.

REGVLA VI.

259. *SI A ſit ad C, ut E ad H, & E ſit ad H, ut R ad F, & ſic deinceps; ſumma antecedentium A, E, R erit ad ſummam conſequentium C, H, F, ut antecedens unum A ad conſequens ſuum C.* Tab. IV. Fig. 15

Quia A eſt ad C, ut (*ex hyp.*) E ad H, etiam permutando A erit ad E, ut C ad H. Simili modo oſtendetur E eſſe ad R, ut H ad F. Cum ergo ſit A ad E, ut C ad H, etiam (258.) componendo A ſimul cum E erit ad E, ut C ſimul cum H eſt ad H; ſed vidimus E eſſe ad R, ut H ad F. Ergo etiam (256) ex aequo A ſimul cum E erit ad R, ut C ſimul cum H eſt ad F, atque iterum (258.) componendo tres ſimul A, E, R erunt ad R, ut tres ſimul C, H, F ſunt ad F. Igitur permutando (254.) tres ſimul A, E, R erunt ad tres ſimul C, H, F, ut R ad F, ſive ut A ad C. Q. E. D.

REGVLA VII.

260. *SI prima AC ſit ad ſecundam CS, ut tertia OH ad quartam HS; etiam* dividendo *exceſſus primae AC ſupra ſecundam* Tab. V. Fig. 2.

Digitized by Google

CS erit ad ſecundam CS, ut exceſſus tertiae OH ſupra quartam HS eſt ad quartam HS, ſeu AS erit ad SC, ut OS ad SH.

Rectangulum LR eſt ad aliud R, ut (241.) AC eſt ad CS. Similiter rectangulum VR eſt ad idem R, ut (241.) OH eſt ad HS; ſed (*ex hyp.*) AC eſt ad CS, ut OH ad HS. Ergo etiam rectangulum LR erit ad R, ut rectangulum VR ad idem R, ideoque (225.) rectangulum LR alteri VR erit aequale. Igitur communiter ablato R, rectangulum L aequabitur ipſi V, & proinde (245.) AS erit ad SC, ut OS ad SH. Q. E. D.

REGVLA VIII.

Tab. V. Fig. 7. 261. *SI tota AC ſit ad ablatam partem CS, ut tota OH ad ablatam partem HR; etiam* convertendo *tota AC erit ad reliquam ſui partem SA, ut tota OH ad reliquam ſui partem RO.*

Quia AC eſt ad CS, ut (*ex hyp.*) OH ad HR; etiam (260.) dividendo AS erit ad SC, ut OR ad RH, & invertendo (253.) CS erit ad SA, ut HR ad RO, quare componendo (258.) AC quoque erit ad SA, ut OH ad RO. Q. E. D.

CA-

Digitized by Google

CAPUT III.

De Lineis proportionaliter ſectis, mutuaque ſimilitudine Triangulorum.

PROPOSITIO IV.

262. *SI in triangulo HAE ducatur FC parallela ad unum latus HE; erit AF ad FH, ut AC ad CE. Et contra ſi fuerit AF ad FH, ut AC ad CE; iuncta FC erit ad HE parallela.* Tab. V. Fig. 8.

I. Agantur EF, HC. Quia triangula FHC, FEC ſuper eadem baſi FC, & inter eaſdem parallelas FC, HE conſtituta, aequari (198.) debent, triangulum V (224.) erit ad aliud FHC, ut idem V ad triangulum FEC; ſed (242.) triangulum V eſt ad aequè altum FHC, ut AF ad FH, & (242.) triangulum V ad aequè altum FEC eſt, ut AC ad CE. Ergo etiam AF erit FH, ut AC ad CE.

II. Triangulum V eſt ad aliud (242.) aequè altum FHC, ut AF ad FH, & (242.) triangulum idem V ad aliud FEC eſt, ut AC ad CE; ſed (*ex hyp.*) eſt AF ad FH, ut AC ad CE. Ergo etiam triangulum V erit ad aliud FHC, ut idem V ad aliud FEC, ideoque (255.) triangula FHC, FEC aequalia mutuò erunt. Habent vero communem baſim FC; ergo (199.) parallelae erunt FC, HE. Q. E. D. Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM I.

Tab. V. Fig. 9. 263. Quia in quovis triangulo HAE ductâ FC ad latus HE parallelâ, eſt AF ad FH, ut AC ad CE; etiam invertendo HF erit ad FA, ut EC ad CA.

COROLLARIVM II.

264. Cum ergo ſit HF ad FA, ut EC ad CA; etiam componendo HA erit ad AF, ut EA ad AC.

COROLLARIVM III.

265. Similiter cum ſit AF ad FH, ut AC ad CE; etiam componendo AH erit ad HF, ut AE ad EC.

COROLLARIVM IV.

266. Quare etiam AH erit ad AF, ut HE ad FC. Ductâ enim FR ipſi AE parallelâ, erit (265.) HA ad AF, ut HE ad ER; ſed (176.) in parallelogrammo RFCE eſt ER aequalis FC. Ergo etiam AH erit ad AF, ut HE ad FC.

COROLLARIVM V.

267. Itaque cum ſit (266.) AH ad AF, ut HE ad FC; etiam permutando AH erit ad HE, ut AF ad FC.

COROLLARIVM VI.

Tab. V. Fig. 10. 268. Pariter datis tribus rectis AV, VB, AR,

Digitized by Google

AR, invenietur quarta proportionalis RS, ſi primis AV, VB poſitis in directum, iungatur ad quemvis angulum tertia AR, ductâque VR, huic ex B agatur parallela BS, ipſi AR productae occurrens in puncto S. Eſt (262.) enim AV ad VB, ut AR ad RS.

COROLLARIUM VII.

269. Methodus quoque patet ita dividendi in V rectam datam AB, ut AV ſit ad VB in data ratione M ad N. Iunctâ enim ad quemvis angulum indefinitâ AH, ſumptiſque in ea rectis AR, RS, quae ipſis M, N ſint aequales, iungatur SB, eique ex R agatur parallela RV, quae in data ratione ſecabit rectam AB. Eſt (262.) namque AV ad VB, ut AR ad RS, nimirum (*ex conſtr.*) ut M ad N.

SCHOLION. I.

270. Hinc norunt Geodaetae ex vertice B agri triangularis ABC ducere rectam BS, quae agrum illum triangularem dividat in data ratione M ad N. Si enim (169.) ita dividatur AC in S, ut AS ſit ad SC in data ratione M ad N, & iungatur BS; triangulum ABS erit ad aliud SBC, ut M ad N. Quippe triangulum (242.) ABS eſt ad aliud SBC aequè altum, ut AS ad SC; ſed AS (*ex conſtr.*) eſt ad SC, ut M ad N. Ergo etiam triangulum ABS erit ad aliud SBC, ut M ad N. Tab. V. Fig. 11.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION II.

Tab. V. Fig. 12. 271. Si vero non iam ex vertice B, ſed alio ex puncto L baſis AC ducenda ſit recta LS, quae in data ratione M ad N ſecet triangulum ABC; tunc iunctâ LB, diviſâque (269) baſi AC in data ratione in puncto R, ducatur RS ad LB parallela, & iungatur LS, quae in data ratione ſecabit triangulum ABC. Nam cum triangula BSL, BRL ſuper eadem baſi BL, & inter eaſdem parallelas BL, SR ſint conſtituta, aequalia (198.) utique erunt, ideoque adiecto illis triangulo ABL, quadrilineum ABSL aequale erit (67.) triangulo ABR; unde ſi utrumque auferas a triangulo ABC, remanet triangulum LSC aequale (68.) alteri RBC. Itaque (221.) quadrilineum ABSL eſt ad triangulum LSC, ut triangulum ABR ad aliud RBC; ſed (242.) triangulum ABR eſt ad aliud RBC, ut AR ad RC vel (*ex conſtr.*) ut M ad N. Ergo etiam quadrilineum ABSL erit ad triangulum LSC, ut M ad N.

SCHOLION III.

272. Denique ex corollario 4. huius propoſitionis derivatur conſtructio *Scalae Geometricae*, cuius maximus uſus eſt in Architectura tàm Civili, quàm Militari, praeſertim ubi Ichnographiae ſunt contrahendae.
Tab. V. Fig. 13. Ad quemvis angulum iunctis AF, AC, a puncto A ad B ſumantur 10. partes aequales AL,

AL, L2., 23.. 34. &c., ſitque AF ex. gr. dupla ipſius AB, ſumptiſque ab A ad C 10. partibus aequalibus A1., 12., 23., 34. &c. compleatur parallelogrammum ACIF. Deinde per puncta ſingula diviſionum ipſius AC ductis rectis ad AF parallelis, transferantur in CD 10. partes iis aequales, quae ſunt in recta AB. Demum puncta C & L, 1. & 2., 2. & 3., 3. & 4. &c. tranſverſis lineis connectantur. Dico, ſi AC fuerit decempeda, fore AL unum pedem, 99. digitum unum, 88. digitos duos, 77. digitos tres, 66. digitos quatuor, & ſic porrò. Nam cum AB ſit decempeda, decupla quoque erit unius pedis; ſed (*ex conſtr.*) decupla eſt etiam rectae AL. Ergo AL pes unus erit. Deinde cum in triangulo ACL recta 99. ſit ad AL parallela, erit (266) AL ad 99., ut AC ad C9; ſed AC decupla (*ex conſtr.*) eſt C9. Ergo & AL decupla erit 99.; vidimus autem eandem AL eſſe pedem. Ergo 99. digitus (53.) erit. Pari modo demonſtrabitur, eſſe 88. digitos duos, 77. tres, 66. quatuor, & ſic deinceps.

PROPOSITIO V.

273. *SI recta AE angulum trianguli biſariam ſecans, etiam ſecet baſim HC; baſis ſegmenta HE, EC eamdem rationem habent, quam reliqua latera HA, AC. Et ſi baſis partes HE, EC eamdem rationem habuerint,* Tab. V. Fig. 14.

Digitized by Google

rint, quam reliqua latera HA, AC; recta AE biſecabit angulum HAC.

I. Ducatur EF ad CA parallela. Angulus HAE aequatur (*ex hyp.*) alteri CAE; ſed eidem angulo CAE aequatur (134.) quoque alternus AEF. Ergo (75.) etiam angulus HAE, vel FAE aequabitur AEF, aequaleſque (182.) proinde erunt FA, FE, atque HF erit ad FA, ut eadem HF ad FE; ſed HF (262.) eſt ad FA, ut HE ad EC, & (267.) HF eſt ad FE, ut HA ad AC. Ergo etiam HE erit ad EC, ut HA ad AC.

II. Recta HE eſt (*ex hyp.*) ad EC, ut HA ad AC; ſed (262.) HE eſt ad EC, ut HF ad FA, & HA eſt ad AC, ut (267.) HF ad FE. Ergo etiam HF eſt ad FA, ut eadem HF ad FE, ac proinde (255.) aequales erunt FA, FE, & angulus FAE (182.) aequabitur FEA. Sed propter parallelas FE, AC, etiam angulus CAE aequatur ſibi alterno (134.) angulo FEA; igitur etiam angulus FAE, vel HAE aequalis erit angulo CAE. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Tab. V. Fig. 15. 16. 274. *SI in triangulis FAO, CER ſinguli anguli F, A, O aequentur ſingulis C, E, R; triangula ſunt ſimilia, hoc eſt etiam latera aequalibus angulis oppoſita, habent pro-*

por-

Digitized by Google

portionalia, nimirum AF eſt ad EC, ut FO ad CR, & FO ad CR, ut AO ad ER, nec non AO ad ER, ut AF ad EC.

Circa angulum A aequalem ipſi E ſumantur AH, AS aequales duabus EC, ER, & jungatur HS, quae (106.) ipſi CR erit aequalis, & angulus AHS aequabitur ipſi C; ſed (*ex hyp.*) etiam angulus F eidem C eſt aequalis. Ergo externus angulus AHS aequabitur (75.) etiam interno F, ideoque (149.) HS erit ad FO parallela. Itaque AF erit ad AH, ut (266.) FO ad HS, & FO ad HS, ut AO ad AS, nec non AO ad AS, ut (264.) AF ad AH; igitur etiam AF erit ad EC, ut FO ad CR, & FO erit ad CR, ut AO ad ER, nec non AO ad ER, ut AF ad EC. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

275. Hinc ſi duo ſeorſim anguli F, & O trianguli FAO aequentur ſingulis C, & R alterius trianguli CER; triangulum FAO ſimile erit alteri CER. Nam cum tertius quoque angulus A tertio E ſit (163.) aequalis; triangulum FAO aequiangulum erit alteri CER, atque adeo (274.) ſimile ipſi erit.

COROLLARIVM II.

276. Similiter ſi in quovis triangulo FAO ducatur HS ad latus unum FO parallela; triangulum HAS ſimile erit toti FAO. Nam Tab. V. Fig. 15.

pro-

Digitized by Google

propter parallelas HS, FO, externus angulus AHS aequabitur (134.) interno F. Eandem ob cauſam externus quoque angulus ASH aequabitur interno O; ergo triangulum HAS ſimile (275.) erit alteri FAO.

COROLLARIVM III.

Tab. V. Fig. 17. 18. 277. Demum triangulorum ſimilium ABD, EFH altitudines BC, FG ſunt, ut baſes AD, EH. Cum enim haec triangula (*ex hyp.*) ſint ſimilia, utique aequabuntur anguli A, & E. Sed recti, ſeu aequales ſunt quoque anguli BCA, FGE; ergo (275) ſimilia ſunt triangula ABC, EFG, ac proinde BC erit ad FG, ut BA ad FE. Sed etiam AD eſt ad EH, ut BA ad FE ob ſimilia triangula ABD, EFH; ergo etiam (226.) BC erit ad FG, ut AD ad EH.

SCHOLION I.

Tab. V. Fig. 17. 18. 278. Ex hac propoſitione determinant Practici diſtantiam AB duorum locorum A, & B, ad quorum unum B vel ob flumen interiectum, vel ob aliam quamcumque cauſam accedi nequit. Sumpto quolibet loco D, cuius diſtantia a puncto A ſit verbi gratiâ pedum 60., ope quadrantis detegantur anguli (97.) A, & D. Tùm in charta probè complanata aſſumatur ex ſcala recta EH partium 60., quot nempè ſunt in AD pedes, fiantque (95.) anguli E, & H aequales angulis A, & D. Demum lateribus EF, HF

HF in aliquo puncto F coeuntibus, aptetur ſcalae recta EF, quae verbi gratiâ ſit 40. illarum partium, quarum 60. ſunt in EH: dico etiam pedum 40. fore intervallum AB. Cum enim in triangulis EFH, ABD anguli E, & H aequentur (*ex conſtr.*) angulis A, & D, triangula (275.) erunt ſimilia, ideoque EH erit ad AD, ut EF ad AB, & permutando EH erit ad EF, ut AD ad AB; ſed (*ex conſtr.*) EH eſt ad EF, ut 60. ad 40. Ergo etiam AD erit ad AB, ut 60. ad 40. Sed AD eſt pedum 60.; ergo AB erit pedum 40.

Scholion II.

279. Similiter ex corollario tertio huius propoſitionis nota quoque fiet area agri triangularis ABD, cuius inacceſſa ſit altitudo BC. Sumptâ EH verbi gratia 60. partium ſcalae, ſi nempe AD 60. pedibus conſtet, fiant (95.) anguli E, & H aequales angulis A, & D, atque ad baſim EH demiſſa perpendiculari FG, haec ſcalae aptetur, ſitque verbi gratia 30. illarum partium, quarum 60. ſunt in EH: dico pedum 30. eſſe quoque rectam BC, quae quaeſita eſt trianguli altitudo. Nam ob angulos E, & H aequales (*ex conſtr.*) angulis A, & D, ſimilia (275.) erunt triangula EFH, ABD, ideoque (277.) EH erit ad AD, ut FG ad BC, & permutando EH erit ad FG, ut AD ad BC. Sed EH eſt ad FG, ut 60. ad

Tab. V. Fig. 17. 18.

ad 30. Ergo etiam AD erit ad BC, ut 60. ad 30. Sed AD eſt pedum 60.; ergo 30. pedum erit quoque recta BC, atque adeo 900. pedum quadratorum erit (196.) area trianguli ABD.

PROPOSITIO VII.

Tab. V. Fig. 19. 280. *Si in circulo duae rectae CL, HF ſe ſecuerint in puncto O; rectangulum COL ſub ſegmentis unius, aequale eſt rectangulo HOF ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Iungantur HC, LF. Cum eidem arcui CF inſiſtant anguli H, & L, utique aequales (138.) mutuò erunt; ſed etiam angulus COH aequatur (96.) ſibi ad verticem oppoſito FOL. Ergo ſimilia (275.) ſunt triangula COH, LOF, ideoque etiam latera aequalibus angulis oppoſita, proportionalia erunt, nempe CO erit ad OF, ut OH ad OL, & rectangulum COL aequabitur (245.) alteri HOF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

Tab. V. Fig. 20. 281. Si ex quolibet circumferentiae puncto C demiſſa ſit ad diametrum HF perpendicularis CO; huius quadratum aequabitur rectangulo HOF ſub ſegmentis diametri. Si enim producatur CO ad L, chorda CL biſecta (190.) erit in O, ideoque rectangulum COL idem erit cum quadrato

per-

Digitized by Google

perpendicularis CO; ſed rectangulum COL (280.) rectangulo HOF eſt aequale. Ergo etiam quadratum perpendicularis CO aequabitur eidem rectangulo HOF.

COROLLARIVM II.

282. Quia quadratum perpendicularis CO aequale eſt (281.) rectangulo HOF, erit (249.) HO ad CO, ut eadem CO ad OF, ideoque CO media erit proportionalis inter ſegmenta HO, OF.

COROLLARIVM III.

283. Vt ergo inter duas HO, OF detegatur media proportionalis OC, illae ſunt in directum iungendae, ſupraque illarum ſummam HF tamquàm diametrum deſcribendus ſemicirculus HCF, atque ex puncto O erecta perpendicularis OC problemati (282.) ſatisfaciet.

PROPOSITIO VIII.

284. *SI in duobus triangulis FAO, CER fuerint omnia latera ſibi mutuò proportionalia, nimirum AF ſit ad EC, ut FO ad CR, & FO ad CR, ut AO ad ER, & AO ad ER, ut AF ad EC; triangula aequiangula quoque erunt, ideoque etiam ſimilia.* Tab. V. Fig. 15. 16.

Sumpta AH aequali EC, ducatur HS ad FO parallela. Recta (*ex hyp.*) AF eſt ad EC, ut

H FO

FO ad CR; ſed AH eſt ipſi EC aequalis. Ergo etiam AF erit ad AH, ut FO ad CR; ſed ut AF ad AH, ita (266) eſt FO ad HS. Ergo etiam FO erit (226.) ad HS, ut eadem FO ad CR, ideoque (255.) aequabuntur HS, CR. Pari ratiocinio oſtendentur aequales AS, ER; igitur triangula HAS, CER ſunt mutuò aequilatera, ac proinde (83.) aequiangula, ſeu (274) ſimilia; ſed triangulum FAO ſimile (276.) eſt alteri HAS. Ergo ſimile quoque erit triangulo CER. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

Tab. V. Fig. 15. 16. 285. *SI in duobus triangulis FAO, CER circa aequales angulos A, & E fuerint latera invicem proportionalia, nimirum AF ſit ad EC, ut AO ad ER; triangula erunt ſimilia.*

Circa angulum A aequalem ipſi E ſumantur AH, AS aequales duabus EC, ER, & iungatur HS, quae (106.) ipſi CR erit aequalis. Igitur triangula HAS, CER ſunt mutuò aequilatera, ideoque (83.) aequiangula, & (274.) ſimilia. Iam vero cum AF ſit ad EC, ut (*ex hyp.*) AO ad ER, erit quoque AF ad AH, ut AO ad AS, & dividendo erit FH ad HA, ut OS ad SA, atque invertendo AH erit ad HF, ut AS ad SO. Igitur HS parallela (262.) erit ad FO, & trian-

triangulum FAO ſimile (276.) alteri HAS, quare ſimile quoque erit triangulo CER. Q. E. D.

COROLLARIUM.

286. Hinc ſuper datam AC conſtruetur triangulum AFC ſimili alteri LRO, ſi facto (88.) angulo CAH aequali angulo L, fiat (268.) ut LO ad AC, ita LR ad AF, & iungatur FC. Tab. V. Fig. 21. 22.

PROPOSITIO X.

287. *Supra datam rectam AC deſcribere figuram AFEC alteri LRHO ſimilem, ſimiliterque cum illa poſitam.* Tab. V. Fig. 23. 24.

Ductâ diagonali RO, quae figuram LRHO dividet in triangula P, & K, fiat ſupra AC triangulum V alteri (286.) P ſimile, & ſupra FC triangulum S ſimile ipſi K: dico, figuram AFEC ſimilem eſſe alteri LRHO, ſimiliterque cum illa poſitam. Nam ob ſimilia triangula V, & P, angulus AFC aequabitur (238.) LRO; ſed ob ſimilia triangula S, & K etiam angulus CFE aequatur angulo ORH. Ergo totus angulus AFE aequabitur toti LRH. Pari modo oſtendetur, angulum ACE aequari angulo LOH; ergo cum (*ex conſtr.*) etiam anguli A, & E aequentur angulis L, & H, ſequitur figuram AFEC eſſe aequiangulam datae LRHO. De-

mum in ſimilibus triangulis V, & P eſt (238.) AF ad LR, ut FC ad RO; ſed etiam in ſimilibus triangulis S, & K eſt (238.) FE ad RH, ut FC ad RO. Ergo etiam (226.) AF erit ad LR, ut FE ad RH. Eodem ratiocinio reliqua latera aequalibus angulis intercepta, demonſtrantur proportionalia; ergo figura AFEC ſimilis (238.) erit alteri LRHO, ſimiliterque cum illa poſita. Q.E.F.

COROLLARIVM I.

288. Quaecumque ergo figurae AFEC, LRHO erunt mutuò ſimiles, & ſimiliter poſitae, ſi ex totidem triangulis ſimilibus, ſimiliterque poſitis coaleſcant.

COROLLARIVM II.

Tab. V. Fig. 25. 289. Quare ſimilia erunt parallelogramma RSAC, FEAO circa eandem diagonalem deſcripta. Nam ob parallelas SR, EF, triangulum ASR ſimile erit (276.) alteri AEF. Pari modo demonſtratur, triangulum ACR ſimile eſſe alteri AOF; igitur ſimilia (288.) erunt parallelogramma FEAO, RSAC.

PROPOSITIO XI.

Tab. V. Fig. 23. 24. 290. *SI ex aequalibus figurarum ſimilium angulis AFE, LRH agantur diagonales FC, RO; figurae in ſimilia triangula numero aequalia dividentur.*

Cum

Digitized by Google

Cum ſimiles ſint figurae AFEC, LRHO, utique (238) circa aequales angulos A, & L erit AF ad LR, ut AC ad LO, ideoque (285.) triangulum V ſimile erit P, & angulus AFC aequabitur (238.) LRO; ſed ob ſimilitudinem figurarum, totus angulus AFE aequatur toti LRH. Ergo etiam reliquus CFE aequalis erit reliquo ORH; ſed anguli quoque E, & H ſunt (238.) aequales. Ergo ſimilia (275.) erunt etiam triangula S, & K. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

291. Ergo ſimilia parallelogramma RSAC, FEAO deſcripta erunt circa eandem diagonalem AF. Nam ductis ex communi angulo A diagonalibus AR, AF, ſimilia (290.) erunt triangula RSA, FEA, & angulus SAR aequabitur alteri EAF. Sed unum latus AS anguli SAR cadit ſupra latus AE anguli EAF. Ergo & reliquum latus AR anguli SAR cadere debet (20.) ſupra reliquum latus AF alterius anguli EAF, atque ita parallelogramma RSAC, FEAO circa eandem diagonalem AF deſcripta erunt. Tab. V. Fig. 15.

COROLLARIUM II.

292. Hinc ſi fuerint binae figurae ſimiles ABCDE, FGHLM, atque ex duobus aequalibus angulis A & F, B & G ad reliquos angulos agantur diagonales AD, AC, FL, FH, itemque BE, BD, GM, GL; ſingula trian-

Digitized by Google

gula AEB, ADB, ACB ſimilia erunt ſingulis FMG, FLG, FHG. Etenim cum ex aequalibus figurarum ſimilium angulis B & G ductae ſint diagonales BE, GM, utique triangulum AEB ſimile (290.) erit alteri FMG. Pariter quia ex aequalibus angulis D & L ductae ſunt diagonales DA, DB, LF, LG, triangulum ADB erit (290.) ſimile FLG. Demum cum ex aequalibus angulis A & F ſint ductae diagonales AC, FH, triangulum ACB erit (290.) ſimile FHG.

COROLLARIVM III.

293. Ergo econtra ſi ſingula triangula AEB, ADB, ACB ſimilia ſint ſingulis FMG, FLG, FHG; figurae ABCDE, FGHLM erunt ſimiles inter ſe. Si enim non eſſent ſimiles hae figurae, neque etiam ſimilia forent (292.) triangula recenſita, contra hypotheſim.

SCHOLION I.

294. Hoc ultimum corollarium in tota Agrimenſura maximum habet uſum. Etenim ſi ex duobus tantùm locis A, & B fundi, aut agri cuiuſpiam Ichnographiam deſcribere, & dimenſiones accipere opus ſit; metire prius locorum diſtantiam AB, & oculorum aciem dirigens in obiecta conſpicua, quibus ager terminatur in E, D, C, probè obſerva angulos BAE, BAD, BAC, itemque ABE, ABD, ABC. Hoc peracto, in charta aut tabula duc rectam lineam FG

tot

Digitized by Google

tot particulis è ſcala depromptis conſtantem, quot inventi ſunt pedes in intervallo AB, fiantque in F, & G anguli aequales inventis in A, & B. Linearum ita ductarum concurſus in M, L, H determinabunt ambitum figurae FGHLM, quae (293) agro deſcribendo ſimilis prorſus erit. Itaque quot fuerint particulae in rectis inventis FM, ML, LH, HG, totidem pedes erunt in intervallis AE, ED, DC, CB. Area vero ex dictis (206.) facile innoteſcet.

SCHOLION II.

295. Eadem ratione diſtantiam DC utrinque inacceſſam metiri licet. Etenim ſumptis duabus ſtationibus in A, & B, quarum intervallum liceat menſurare, notatiſque angulis in A, & B triangulorum ADB, ACB, fiat ut antea ſupra FG quadrilaterum LFGH ſimile alteri DABC; quot ſcalae particulae fuerint in recta LH, totidem pedes continebit diſtantia quaeſita DC.

PROPOSITIO XII.

296. *SI a puncto C extra circulum dato ducantur duae rectae, una tangens CA, altera ſecans CH; rectangulum HCS ſub tota ſecante HC, & parte CS comprehenſum, aequabitur quadrato tangentis CA.* Tab. VI. Fig. 3.

Iungantur AH, AS. Quia angulus CAS

aequalis (141.) eſt alteri AHS, ſive ipſi AHC, eſtque angulus ACS aequalis angulo ACH, utique triangulum ACH ſimile (275.) erit alteri ACS, & CH erit ad CA, ut eadem CA ad CS. Igitur rectangulum HCS ſub extremis HC, CS, aequabitur quadrato (248.) mediae CA, quae circulum tangit in A. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

297. Si ex eodem puncto C agatur quaevis alia ſecans CO, etiam rectangulum OCL aequale erit quadrato (296.) tangentis CA. Ergo (75) rectangulum OCL aequabitur alteri HCS.

COROLLARIVM II.

Tab. VI. Fig. 4. 298. Quae ex eodem puncto C circulum tangunt, CA, CR, mutuò ſunt aequales. Earum quippe quadrata cum aequentur eidem (296.) rectangulo HCS, etiam mutuò ſunt aequalia, aequaleſque proinde erunt etiam rectae CA, CR.

COROLLARIVM III.

299. Similiter ſi ex tangentium concurſu C ducatur ad centrum O recta CO; haec bifariam ſecabit angulum ACR. Quippe iunctis OA, OR, in triangulis OAC, ORC quorum commune eſt latus CO, latera CA, AO aequalia (298.) ſunt lateribus CR, RO. Ergo (83.) angulus ACO aequabitur RCO,

Digitized by Google

RCO, ideoque CO bifariam ſecabit angulum ACR.

SCHOLION.

300. Ex hac propoſitione colligi etiam poteſt diſtantia illa, ad quam ſe extendit proſpectus oculi in ſuperficiem maris. Sit HI montis altitudo aſſurgens ad 1000. paſſus, quaeraturque intervallum HA quouſque patet proſpectus oculi conſtituti in puncto H. Quoniam recta, ſeu viſualis radius HA tellurem tangit in puncto A, utique HA quadratum aequale erit rectangulo SHI, atque adeo recta AH media erit (249.) proportionalis inter rectas SH, HI. Iam vero cum (251.) diameter terrae SI ſit paſſuum 7843156., & HI paſſuum 1000.; tota SH conſtabit paſſibus 7844156. Itaque recta AH media erit proportionalis inter paſſus 7844156., & paſſus 1000., atque adeo dabit paſſus 88567. hoc eſt milliaria 88., & praeterea paſſus 567. Igitur intra hoc ſpatium continebuntur obiecta omnia, quae ex hoc monte videri poſſunt, cum caetera ob telluris rotunditatem ex oculis ſe ſubducant. At ſi HI ſit unius paſſus, quantum fermè aſſurgit hominis oculus ſtantis in littore; tùnc recta SH erit paſſuum 7843157., atque adeo recta AH media erit proportionalis inter paſſus 7843157. & paſſum unum, ſeu dabit paſſus $2800.\frac{7}{10}$ hoc eſt milliaria 2, ac praeterea paſſus $800.\frac{7}{10}$ Tab. IX. Fig. 3.

Qua-

Quare ſi duo homines ſex paſſuum millibus in maris littore diſtent inter ſe, ob telluris rotunditatem ſe ſe mutuò non videbunt.

PROPOSITIO XIII.

Tab. VI. Fig. 4. 301. *SI recta CR ita circumferentiae occurrat in puncto R, ut eiuſdem quadratum aequale ſit rectangulo HCS; recta CR circulum tanget in puncto R.*

Ductâ tangente CA, agantur radii OA, OR. Quia (296.) tàm quadratum tangentis CA, quàm quadratum (*ex hyp.*) rectae CR aequatur rectangulo HCS; aequalia (75.) utique erunt quadrata rectarum CA, CR, rectaeque ipſae erunt aequales. Igitur angulus CRA aequabitur (182.) angulo CAR; ſed ob aequales OA, OR, etiam angulus ORA aequatur (182.) angulo OAR. Igitur totus angulus CRO toti CAO erit aequalis. Sed rectus (126.) eſt angulus CAO; ergo rectus quoque erit angulus CRO, ideoque tangens (124.) erit CR. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

Tab. VI. Fig. 5. 302. *DAtam rectam LA ita ſecare in puncto C, ut quadratum partis maioris LC aequale ſit rectangulo LAC, ſub tota nempe LA, & minori parte AC.*

Ere-

Digitized by Google

Erecta ad LA perpendiculari LF, quae dimidia ſit LA, centro F, & intervallo FL deſcribatur circulus, quem (124.) tanget LA in L ob rectum (*ex conſtr.*) angulum ALF. Demum per F traiectâ AH, ducatur HL, eique parallela RC, quae ſecabit rectam LA in puncto quaeſito C. Nam cum radius LF factus ſit dimidius rectae LA, utique diameter HR aequabitur ipſi LA, ideoque quadratum HR aequabitur tangentis LA quadrato, hoc eſt (296.) rectangulo HAR. Itaque AH erit ad HR, ut (249.) eadem HR ad RA. Sed ob rectam RC ad HL parallelam, AL eſt ad LC, ut (265.) AH ad HR, & LC eſt ad CA, ut (263.) HR ad RA; ergo cum ſit AH ad HR, ut HR ad RA, erit quoque AL ad LC, ut LC ad CA, & proinde quadratum maioris partis LC aequabitur (249.) rectangulo LAC. Q. E. F.

PROPOSITIO XV.

303. *Conſtruere triangulum iſoſceles CAH, cuius alteruter aequalium angulorum ACH, AHC ſit duplus anguli ad verticem A.* Tab. VI. Fig. 6.

Sumatur quaepiam AH, quae ita (302.) ſecetur in E, ut quadratum maioris partis AE aequale ſit rectangulo AHE. Deinde centro A per H deſcripto circulo HCL, parti AE capiatur circino aequalis chorda HC,

HC, & iungatur AC. Cum AE quadratum aequale ſit (*ex conſtr.*) rectangulo AHE, erit (249.) AH ad AE, ut eadem AE ad EH; ſed AC ipſi AH eſt (30.) aequalis, ſicuti & CH aequatur (*ex conſtr.*) ipſi AE. Ergo etiam AC erit ad CH, ut AE ad EH, ideoque (273.) angulus ACE aequabitur ECH, & angulus ACH duplus erit anguli ECH. Iam vero cum quadratum AE, vel HC par ſit (*ex conſtr.*) rectangulo AHE, recta CH tanget circulum (301.) tranſeuntem per puncta A, E, C, ideoque angulus ECH aequabitur (141.) ipſi A in ſegmento alterno. Vidimus autem angulum ACH eſſe duplum anguli ECH; ergo idem angulus ACH, vel eidem aequalis AHC, duplus quoque erit alterius A. Q. E. F.

PROPOSITIO XVI.

Tab. VI. Fig. 7. 304. D*ato circulo CAL inſcribere Pentagonum ordinatum FCHAL.*

Fiat triangulum (303.) iſoſceles, cuius uterlibet ad baſim angulus duplus ſit anguli ad verticem. Huic aequiangulum (167.) FHL inſcribatur circulo CAL. Demum ad baſim anguli HFL, HLF biſecentur (85.) rectis FA, LC, iunganturque FC, CH, HA, AL, quae cum recta FL determinabunt pentagonum ordinatum. Nam cum quinque anguli HFA, AFL, HLC, CLF, FHL ſint

aequa-

Digitized by Google

aequales, utique (139.) etiam arcus, chordaeque (107.) HA, AL, LF, FC, CH debent aequari; pentagonum igitur aequilaterum ſit oportet. Eſt vero etiam (137.) aequiangulum, quippe cum eius anguli CFL, FLA &c. inſiſtant arcubus aequalibus CHAL, FCHA &c., aequari utique debent. Ergo ordinatum erit pentagonum FCHAL. Q. E. F.

SCHOLION I.

305. Generatim polygona regularia imparium laterum circulo inſcribuntur ope trianguli iſoſcelis FHL, cuius alteruter aequalium ad baſim angulorum HFL, HLF eſt duplus, triplus, quadruplus &c. anguli ad verticem conſtituti; veluti ſi angulus HFL triplus ſit anguli FHL, erit FL heptagoni latus; ſi quadruplus, enneagoni, & ſic deinceps. Nam quemadmodum (304.) ſi inſcribatur circulo triangulum iſoſceles FHL, cuius ad baſim anguli ſint dupli verticalis anguli FHL, angulorum ad baſim biſectorum partes, una cum angulo verticali, inſiſtunt arcubus quinque, qui aequales ſunt totius circumferentiae partes, ideoque baſis FL eſt latus pentagoni ordinati. Eadem ratione ſi inſcribatur circulo triangulum iſoſceles FHL, cuius ad baſim anguli ſint tripli verticalis anguli FHL, angulorum ad baſim triſectorum partes, una cum angulo verticali, inſiſtent arcubus ſeptem, qui aequales erunt totius circumferentiae partes, ideoque

que baſis FL latus erit heptagoni ordinati eidem circulo inſcribendi. Pari modo conſtabit de reliquis.

SCHOLION II.

306. Nondùm vero detecta methodus eſt ſolius circini, & regulae beneficio iſoſceles triangulum dato circulo inſcribendi, cuius uterlibet ad baſim angulus ſit triplus, quadruplus &c. anguli ad verticem conſtituti. Ergo neque ulla methodus hactenus eſt detecta, qua regula, & circino heptagonum, enneagonum, & reliqua imparium laterum polygona dato circulo inſcribantur.

SCHOLION III.

307. Practicè autem quodvis ordinatum polygonum circulo inſcribetur, ſi circumferentia in tot aequas partes diviſa, quot latera ſunt polygoni inſcribendi, ducantur rectae diviſionum puncta iungentes, quae determinabunt quaeſitum polygonum ordinatum.

CAPVT IV.

De rectarum linearum potentiis, ſeu quadratis ſuper illas deſcriptis.

PROPOSITIO XVII.

Tab. VI. Fig. 8. 308. *SI ab angulo recto F trianguli rectanguli AFC demittatur ad AC perpendicu-*

Digitized by Google

dicularis FO; erit quadratum FC aequale rectangulo ACO, & quadratum FA aequabitur rectangulo CAO, nec non quadratum FO rectangulo AOC erit aequale.

I. Quia rectus eſt (*ex hyp.*) angulus FOA, circulus ſupra FA tamquàm diametro deſcriptus, tranſibit (172.) per punctum O. Cum vero rectus ſit quoque angulus AFC, utique FC perpendicularis erit ad diametrum FA, ideoque (124.) tanget in puncto F circulum FOA, quem ſecat altera COA, & proinde quadratum FC aequale (296.) erit rectangulo ACO.

II. Cum rectus ponatur angulus FOC, circulus ſupra FC veluti diametro deſcriptus, tranſibit (172.) per punctum O, ideoque ſuperiori adhibito ratiocinio, demonſtrabitur quadratum FA rectangulo CAO eſſe aequale.

III. Quia rectus eſt (*ex hyp.*) angulus AFC, circulus ſupra AC tamquàm diametro deſcriptus, tranſibit (172.) per punctum F, ideoque quadratum rectae OF, quae perpendicularis eſt ad AC, aequale (281) erit rectangulo AOC. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

309. Cum quadratum FC par ſit (308.) rectangulo ACO, erit (249.) AC ad FC, ut eadem FC ad CO. Igitur FC media erit proportionalis inter duas AC, CO. Eandem

dem ob cauſam FA media erit inter duas CA, AO, nec non OF media inter duas AO, OC.

COROLLARIUM II.

310. Hinc ad duas rectas AO, OF invenietur tertia proportionalis OC, ſi iiſdem AO, OF ad angulum rectum iunctis, ducatur AF, atque ad hanc agatur perpendicularis FC, ipſi AO productae occurrens in puncto C. Eſt enim (309.) AO ad OF, ut OF ad OC.

PROPOSITIO XVIII.

Tab. VI. Fig. 9. 311. *In triangulo rectangulo AFC quadratum lateris AC oppoſiti angulo recto F, aequale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum laterum FC, FA.*

Eſto RACH lateris AC quadratum, quod a recta FS perpendiculari ad idem latus AC, dividatur in duo rectangula HCOS, SOAR. Cum in quadrato RACH ſint aequales HC, AC, utique rectangulum HCOS aequabitur rectangulo ſub rectis AC, CO, hoc eſt rectangulo ACO. Sed hoc rectangulum ACO aequale (308.) eſt quadrato lateris FC; ergo idem rectangulum HCOS aequabitur quoque quadrato lateris FC. Simili modo oſtendam reliquum rectangulum SOAR quadrato reliqui lateris FA eſſe aequale;

Digitized by Google

quale; ergo quadratum RACH aequale erit quadratis ſimul reliquorum laterum FC, FA. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

312. Itaque ſi ſupra latus AH fiat quadratum AFCH, agaturque diagonalis FH; huius quadratum duplum erit quadrati lateris AH. Quippe FH quadratum cum aequale ſit (311.) quadratis aequalium laterum AH, AF, duplum quoque erit quadrati lateris AH. Tab. VI. Fig. 10.

COROLLORIUM II.

313. Quare determinato in numeris latere AH, nullus numerus erit, qui exprimat diagonalem FH. Si enim latus AH ſit 2., eius (194.) quadratum erit 4., unde quadratum (312.) diagonalis FH erit 8. Si ergo diagonalis FH aliquo poſſet numero deſignari, is ſane huiuſmodi eſſet, ut per ſeipſum multiplicatus efficeret 8. Conſtat vero nullum numerum eſſe, qui per ſe ipſum multiplicatus efficiat 8. Ergo nullus quoque numerus erit, qui exprimat diagonalem FH.

COROLLARIUM III.

314. Ergo unitas, quae pars eſt aliquota lateris AH, aliquota pars eſſe nequit diagonalis FH, ideoque quadrati latus AH incommenſurabile (57.) erit diagonali FH.

Digitized by Google

COROLLARIVM IV.

Tab. VI. Fig. 11. 315. Si recta AC ſecta ſit utcumque in S; duo rectangula ſub tota AC, & partibus CS, SA comprehenſa, quadrato totius aequalia ſunt. Deſcripto enim ſemicirculo AHC, erectaque ex S perpendiculari SH, iungantur AH, CH. Cum rectus ſit (144.) in ſemicirculo angulus AHC, quadratum AC aequabitur (311.) quadratis ſimul HC, HA; ſed HC quadratum aequatur (308.) rectangulo ACS, & quadratum HA aequatur (308.) rectangulo CAS. Ergo quadratum AC aequabitur rectangulis ACS, CAS ſimul ſumptis.

COROLLARIVM V.

316. Rectangulum quoque ſub tota AC, & partium alterutra CS comprehenſum, aequale eſt rectangulo ſub partibus AS, SC una cum quadrato praedictae partis CS. Nam rectangulum ſub AC, & CS aequatur (308.) quadrato HC, ſeu quadratis (311.) ſimul HS, CS, ſive (308.) rectangulo ASC una cum quadrato CS.

COROLLARIVM VI.

317. Pariter totius AC quadratum aequale eſt quadratis partium AS, SC una cum duplo rectanguli ASC ſub iiſdem partibus comprehenſi. Quadratum quippe AC aequale eſt (311.) quadratis HC, HA; ſed quadratum HC aequatur (311.) quadratis SC, SH, & qua-

Digitized by Google

quadratum HA aequatur (311.) quadratis AS, SH. Ergo quadratum AC aequabitur quadratis AS, SC una cum duplo quadrati SH, ſive una cum duplo (308.) rectanguli ASC.

COROLLARIUM VII.

318. Imò ſi AC ſecta fuerit aequaliter in R, & inaequaliter in S, quadratum dimidiae RC aequabitur quadrato intermediae RS una cum rectangulo ASC a partibus inaequalibus comprehenſo. Nam quadratum RH aequale eſt (311.) quadratis ſimul RS, SH, hoc eſt quadrato RS una cum (308.) rectangulo ASC; ergo etiam quadratum RC aequabitur eidem RS quadrato una cum rectangulo ASC.

COROLLARIUM VIII.

319. Si vero AC ſit bifariam ſecta in E, Tab. VI. Fig. 12.
eique recta quaedam adiiciatur CS; quadratum ES compoſitae ex dimidia, & adiecta, aequabitur quadrato dimidiae EC una cum rectangulo ASC. Deſcripto enim ſemicirculo AOC, agatur tangens SO, & iungatur OE. Cum (126.) rectus ſit angulus EOS, quadratum ES aequabitur (311.) quadratis EO, OS, ſeu quadratis EC, OS. Sed quadratum tangentis OS aequale eſt (296.) rectangulo ASC. Ergo etiam quadratum ES aequabitur quadrato EC una cum rectangulo ASC.

Digitized by Google

PROPOSITIO XIX.

Tab. VI. Fig. 13. 14. 320. *SI ſupra baſim AS obtuſanguli, vel acutanguli trianguli AVS deſcribatur ſemicirculus ARS, occurrens rectis VS, VA in punctis L, & R; quadratum diametri AS aequabitur duobus ſimul rectangulis LSV, RAV.*

Demiſſa ad AS perpendiculari VE, iungatur AL. Quia in triangulis ALS, VES anguli ALV, AEV (*ex conſtr.*) ſunt recti, utique circulus diametro AV deſcriptus, tranſibit (172.) etiam per puncta E, & L, ideoque rectangulum ASE aequabitur (297.) alteri LSV. Similiter ob rectos angulos VRS, VES, circulus diametro VS deſcriptus, tranſibit (172.) etiam per R & E, atque adeo rectangulum SAE aequale erit (297.) alteri RAV. Ergo rectangulum ASE una cum rectangulo SAE, hoc eſt quadratum (315.) diametri AS aequabitur duobus ſimul rectangulis LSV, RAV. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

Tab. VI. Fig. 13. 321. *SI in triangulo obtuſangulo AVS demiſſa ſit ad VS perpendicularis AL; quadratum lateris AS oppoſiti obtuſo angulo AVS, aequabitur quadratis reliquorum laterum VS, VA una cum duplo rectanguli LVS.*

Quadratum lateris AS aequale eſt (320.) re-

rectangulis LSV, RAV; ſed rectangulum LSV aequale (316.) eſt quadrato VS una cum rectangulo LVS, & rectangulum RAV aequatur (316.) quadrato V una cum rectangulo RVA. Ergo quadratum lateris AS aequabitur quadratis VS, VA una cum rectangulis LVS, RVA; ſed rectangulum LVS aequatur (280.) alteri RVA. Ergo quadratum lateris AS aequabitur quadratis VS, VA una cum duplo rectanguli LVS. Q. E. D.

COROLLARIUM.

322. Igitur quadratum lateris AS oppoſiti obtuſo angulo AVS, maius eſt quadratis laterum reliquorum.

PROPOSITIO XXI.

323. *SI in triangulo acutangulo AVS demiſſa ſit ad VS perpendicularis AL; quadratum lateris AS oppoſiti acuto angulo AVS una cum duplo rectanguli SVL aequabitur quadratis reliquorum laterum VA, VS.* Tab. VI. Fig. 14.

Quadratum VA aequale (315.) eſt rectangulis VAR, AVR, ſicuti & quadratum VS aequatur (315.) rectangulis VSL, SVL. Ergo duo quadrata VA, VS aequantur quatuor rectangulis VAR, VSL, AVR, SVL; ſed duo rectangula VAR, VSL aequantur (320.) quadrato AS, & reliqua duo AVR, SVL utpote (297.) aequalia, aequantur du-

plo rectanguli SVL. Ergo duo quadrata VA, VS aequantur quadrato AS una cum duplo rectanguli SVL. Q. E. D.

COROLLARIVM.

324. Igitur quadratum lateris AS oppoſiti acuto angulo AVS, minus eſt quadratis laterum reliquorum.

PROPOSITIO XXII.

Tab. VI. Fig. 9. 325. *SI in triangulo AFC quadratum lateris AC aequale ſit quadratis laterum reliquorum AF, FC; rectus erit angulus F, cui opponitur idem latus AC.*

Angulus F obtuſus eſſe nequit; ſi enim ita eſſet, utique quadratum AC maius eſſet (322.) quadratis laterum AF, FC, contra hypotheſim. Sed neque acutus eſſe poteſt idem angulus F, alioquin quadratum idem AC minus eſſet (324.) quadratis AF, FC, rurſus contra hypotheſim. Cum ergo neque obtuſus, neque acutus ſit angulus F, neceſſe eſt ut ſit rectus. Q. E. D.

CA-

Digitized by Google

CAPUT V.

De Parallelogrammorum, Triangulorum, & Figurarum ſimilium proportione.

PROPOSITIO XXIII.

326. *Parallelogrammum quodcumque ACFH eſt ad aliud VEGS in ratione compoſita ex ratione baſis AH ad baſim VS, & ex ratione altitudinis CL ad altitudinem EO.* Tab. VI. Fig. 15, 16.

Ratio compoſita baſis AH ad baſim VS, & altitudinis CL ad altitudinem EO eſt illa, quam habet (235.) productum ex antecedentibus, nimirum ex baſi AH in altitudinem CL, ad productum ex conſequentibus, nempe ex baſi VS in altitudinem EO. Sed area parallelogrammi ACFH eſt productum (301.) ex baſi AH in altitudinem CL, & area parallelogrammi VEGS eſt productum ex baſi VS in altitudinem EO. Ergo ratio compoſita baſis AH ad baſim VS, & altitudinis CL ad altitudinem EO eadem erit cum ratione parallelogrammi ACFH ad aliud VEGS. Haec ergo parallelogramma inter ſe erunt in eadem compoſita ratione. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

327. Cum triangula ACH, VES dimidia

(176.) ſint parallelogrammorum ACFH, VEGS; utique triangula erunt, ut parallelogramma, atque idcirco in ratione compoſita baſium AH, VS, & altitudinum CL, EO.

Corollarivm II.

Tab VI. Fig. 17. 18. 328. Pariter cum rectangula F, L ſint (150.) parallelogramma, etiam F erit ad L in ratione compoſita baſis A ad baſim C, & altitudinis S ad altitudinem H.

Corollarivm III.

Tab. VI. Fig. 17. 18. 19. 329. Hinc ſi fuerint tres rectae A, C, E; ratio primae A ad tertiam E compoſita erit ex duabus rationibus intermediis, nimirum A ad C, & C ad E. Super extremas A, E fiant rectangula F, V quorum altitudines S, O aequales ſint mediae C. Similiter ſuper mediam C fiat rectangulum L, cuius altitudo H aequalis ſit tertiae E. Igitur in rectangulis L, V baſis C eſt (*ex conſtr.*) ad baſim E, ut reciprocè altitudo O ad altitudinem H, ideoque rectangula L, V aequalia (245.) erunt, ac proinde (223.) rectangulum F erit ad aliud V, ut idem F ad L; ſed (241.) F eſt ad V, ut A ad E, & F eſt ad L in ratione (328.) compoſita A ad C, & S ad H. Ergo etiam A erit ad E in ratione compoſita A ad C, & S ad H; ſed altitudines S, H ſunt (*ex conſtr.*) aequales rectis C, E. Ergo etiam A erit ad

ad E in ratione compoſita A ad C, & C ad E.

COROLLARIUM IV.

330. Hinc ſi fiat, ut altitudo BC parallelogrammi AE ad altitudinem HM parallelogrammi FG, ita huius baſis FL ad quartam proportionalem N; parallelogrammum AE erit ad aliud FG, ut illius baſis AD ad quartam inventam N. Nam (326.) parallelogrammum AE eſt ad aliud FG in ratione compoſita AD ad FL, & BC ad HM; ſed ratio BC ad HM eadem eſt (*ex conſtr.*) ac ratio FL ad N. Ergo parallelogrammum AE erit ad aliud FG in ratione compoſita AD ad FL, atque FL ad N, hoc eſt (329.) erit ut AD ad N. Tab.IX. Fig.4.5.

PROPOSITIO XXIV.

331. *Parallelogramma ACFH, VEGS, quorum aequantur anguli A, V, ſunt in ratione compoſita ex rationibus AH ad VS, & CA ad EV.* Tab. VI. Fig. 15. 16.

Demittantur ad baſes AH, VS perpendiculares CL, EO. Quia aequantur anguli A, V, rectique, ſeu aequales ſunt quoque anguli CLA, EOV, ſimilia (275.) erunt triangula ACL, VEO, ideoque CA erit ad EV, ut CL ad EO, ſeu ratio CA ad EV eadem erit cum ratione CL ad EO. Sed paralle-

rallelogramma ACFH, VEGS ſunt in ratione (326.) compoſita ex rationibus AH ad VS, & CL ad EO. Ergo erunt quoque in ratione compoſita ex rationibus AH ad VS, & CA ad EV. Q. E. D.

COROLLARIVM.

332. Igitur etiam triangula ACH, VES quorum aequantur anguli A, V, erunt in ratione compoſita ex rationibus AH ad VS, & CA ad EV. Nam triangula ACH, VES cum ſint (176.) dimidia parallelogrammorum ACFH, VEGS, utique invicem erunt ut huiuſmodi parallelogramma, ideoque etiam in ratione (331.) compoſita ex rationibus AH ad VS, & CA ad EV.

PROPOSITIO XXV.

Tab. VI. Fig. 15. 16. 333. *Similia parallelogramma ACFH, VEGS ſunt in ratione duplicata homologorum laterum AH, VS.*

Cum parallelogramma ACFH, VEGS ſint ſimilia, aequales (238.) habebunt angulos A, V, atque adeo erunt in ratione (331.) compoſita ex rationibus AH ad VS, & CA ad EV. Sed propter ſimilia parallelogramma, eſt (238.) AH ad VS, ut CA ad EV, hoc eſt ratio AH ad VS aequatur rationi CA ad EV. Ergo eadem parallelogramma ACFH, VEGS ſunt quoque (236.) in ratione dupli-

duplicata homologorum laterum AH, VS. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

334. Si ſupra quaſcumque rectas AC, FH fiant quadrata F, L, haec utique erunt parallelogramma (238.) ſimilia. Igitur etiam quadrata F, L erunt in ratione duplicata laterum AC, EH. Tab. VI. Fig. 20, 21.

COROLLARIVM II.

335. Hinc ratio duplicata rectarum AC, EH per rationem quadratorum F, L eorundem laterum optimé deſignatur.

COROLLARIVM III.

336. Cum ergo ſimilia parallelogramma ACFH, VEGS ſint in ratione duplicata laterum (333.) homologorum AH, VS, erunt (335.) quoque, ut quadrata laterum eorumdem. Tab. VI. Fig. 15, 16.

PROPOSITIO XXVI

337. *Quaecumque triangula ſimilia ACH, VES ſunt inter ſe, ut quadrata homologorum laterum AH, VS.* Tab. VI. Fig. 15, 16.

Compleantur parallelogramma ACFH, VEGS. Cum rectae CF, AH ſint invicem (48.) parallelae, angulus FCH aequatur (134) alterno CHA. Eandem ob cauſam angu-

lus

lus GES aequalis erit alteri ESV. Sed ob ſimilia triangula ACH, VES, angulus CHA eſt aequalis (238.) angulo ESV. Ergo etiam angulus FCH aequabitur GES. Eodem modo oſtendam, angulum CHF aequalem eſſe alteri ESG; ergo triangulum CFH ſimile (275.) erit alteri EGS. Parallelogramma igitur ACFH, VEGS ex totidem triangulis ſimilibus, & ſimiliter poſitis coaleſcunt, ideoque (288.) ſimilia erunt. Vnde parallelogrammum ACFH erit ad aliud VEGS, ut quadratum lateris AH ad quadratum (333.) lateris VS; ſed triangulum ACH dimidium eſt (176.) parallelogrammi ACFH, & triangulum VES dimidium eſt (176.) parallelogrammi VEGS. Ergo etiam triangulum ACH erit ad ſimile VES, ut quadratum AH ad quadratum VS. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

Tab. VI. Fig. 22. 338. *SI tres rectae A, E, F fuerint continuè proportionales; prima A erit ad tertiam E, ut quadratum primae A ad quadratum ſecundae E, vel ut quadratum ſecundae E ad quadratum tertiae F.*

Prima A eſt ad tertiam E in ratione compoſita (329.) ex rationibus intermediis A ad E, & E ad F; ſed propter A, E, F continue proportionales, ratio A ad E aequatur rationi E ad F. Ergo prima A erit ad ter-

tertiam F in ratione (236.) duplicata primae A ad ſecundam E, vel ſecundae E ad tertiam F, hoc eſt ut (335.) quadratum A ad quadratum E, vel ut quadratum E ad quadratum F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

339. *Si quatuor rectae A, E, C, H fuerint proportionales; illarum quoque quadrata proportionalia erunt. Et contra ſi proportionalia fuerint quadrata rectarum A, E, C, H; rectae quoque proportionales invicem erunt.* Tab. IV. Fig. 15.

I. Fiat ut A ad E, ita (310.) E ad R, & ut C ad H, ita H ad F, eritque E ad R, ut A ad E, nimirum (*ex hyp.*) ut C ad H, ſive (*ex conſtr.*) ut H ad F. Igitur A eſt ad E, ut C ad H, & E eſt ad R, ut H ad F, unde ex aequo A erit ad R, ut C ad F. Sed (338.) A eſt ad R, ut quadratum A ad quadratum E, & (338.) C eſt ad F, ut quadratum C ad quadratum H. Ergo etiam quadratum A erit ad quadratum E, ut quadratum C ad quadratum H.

II. Si rectae A, E, C, H non ſint proportionales, eſto (268.) ut A ad E, ita C ad aliam F, eritque ut quadratum A ad quadratum E, ita (*num. I.*) quadratum C ad quadratum F. Sed etiam ut quadratum A ad

qua-

Digitized by Google

quadratum E, ita (*ex hyp.*) eſt quadratum C ad quadratum H; ergo (226.) quadratum C eſt ad quadratum F, ut idem quadratum C ad aliud quadratum H, ideoque aequantur quadrata rectarum H, F, ac proinde etiam ipſae rectae aequales erunt. Sed A eſt ad E, ut (*ex conſtr.*) C ad F; ergo etiam A erit ad E, ut C ad H. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

Tab. VI. Fig. 23. 24. 340. *Polygona ſimilia ARCVE, FILSH ſunt, ut quadrata homologorum laterum EV, HS.*

Ex aequalibus angulis A, F agantur diagonales AV, AC, itemque FS, FL, eruntque ſingula triangula K, O, G ſimilia (290.) ſingulis P, Z, T. Itaque cum polygona ſint (*ex hyp.*) ſimilia, erit (338.) EV ad HS, ut VC ad SL, & (339.) quadratum EV ad quadratum HS, ut quadratum VC ad quadratum SL; ſed (337.) triangulum K eſt ad ſibi ſimile P, ut quadratum EV ad quadratum HS, & triangulum O eſt ad ſibi ſimile Z, ut quadratum VC ad quadratum SL. Ergo etiam triangulum K eſt ad P, ut O ad Z. Eodem modo oſtendam, ut O eſt ad Z, ita G eſſe ad T. Igitur ſumma antecedentium K, O; G, ſeu polygonum ARCVE erit ad ſummam conſequentium P, Z, T, ſeu polygonum FILSH,

ut

Digitized by Google

ut unum (259.) antecedens K ad conſequens ſuum P, ſeu (337.) ut quadratum EV ad quadratum HS. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

341. Cum polygona ordinata AEFHL, RZGKI mutuò (238.) ſint ſimilia, erunt quoque ut quadrata (340.) ſuorum laterum. Tab. VI. Fig. 25. 26.

COROLLARIVM II

342. Si ſimilium polygonorum homologa latera EV, HS fuerint nota, etiam polygonorum ratio innoteſcet. Si enim EV ſit ex. gr. ſex pedum, & duorum pedum HS, utique polygona erunt, ut horum numerorum quadrata, nempe ut triginta ſex ad quatuor, ſive ut novem ad unum. Tab. VI. Fig. 23. 24.

COROLLARIVM III.

343. Cum quatuor rectarum proportionalium proportionalia ſint (339.) quadrata, etiam polygona ſimilia, ſimiliterque a quatuor proportionalibus deſcripta, proportionalia (340.) invicem erunt.

PROPOSITIO XXX.

344. *Polygona ordinata AEFHL, RZGKI circulis circumſcripta, ſunt ut quadrata radiorum CO, VS.* Tab. VI. Fig. 25. 26.

Ductis ad puncta contactuum radiis CO, VS,

VS, qui perpendiculares (126.) erunt ad rectas AE, RZ, iungantur CA, CE, VR, VZ. Quia rectae CA, VR biſecant aequales (299.) angulos EAL, ZRI, angulus EAC aequabitur ZRV. Eamdem ob cauſam angulus AEC aequalis erit alteri RZV. Igitur ſimilia (275.) erunt triangula ACE, RVZ, quorum baſes ſunt rectae AE, RZ, altitudines autem radii CO, VS, ideoque (277.) AE erit ad RZ, ut CO ad VS, & (339.) quadratum AE erit ad quadratum RZ, ut quadratum CO ad quadratum VS. Sed polygonum AEFHL eſt (341.) ad aliud RZGKI, ut quadratum AE ad quadratum RZ. Ergo polygonum primum ad alterum quoque erit, ut quadratum CO ad quadratum VS. Q. E. D.

COROLLARIVM.

345. Cum polygona ordinata circulis circumſcripta, in circulos (212.) abeant ſi eorum laterum numerus augeatur in infinitum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum; patet circulos quoque eſſe, ut radiorum quadrata.

PROPOSITIO XXXI.

Tabula VII. Fig. 25. 26. 346. *Polygona ordinata AEFHL, RZGKI circulis circumſcripta, ambitus habent proportionales radiis CO, VS.*

Cum

Cum ordinata polygona ſint (238.) ſimilia, AE erit ad RZ, ut EF ad ZG, & ut FH ad GK, atque ita porrò. Ergo omnium antecedentium ſumma, nempé ambitus polygoni AEFHL erit ad ſummam conſequentium, nempè ad ambitum polygoni RZGKI, ut antecedens (259.) unum AE ad conſequens ſuum RZ. Sed AE eſt ad RZ, ut (277.) radius CO ad radium OS. Ergo etiam ambitus polygoni AEFHL erit ad ambitum alterius RZGKI, ut radius CO ad radium VS. Q. E. D.

COROLLARIUM.

347. Cum polygona ordinata AEFHL, RZGKI abeant in (212.) circulos, & illorum ambitus in circumferentias degenerent, ſi laterum numerus augeatur in infinitum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum; liquet (346.) circulorum quoque circumferentias proportionales eſſe radiis CO, VS.

Digitized by Google

PARS TERTIA
DE SOLIDORVM SYMPTOMATIS ET MENSVRIS.

CAPVT I.

De principiis Solidorum.

DEFINITIO I.

Tab. VI. Fig. 27. 348. Linea FE dicitur *recta* ſeu *perpendicularis* plano ABCD cum eſt perpendicularis ad omnes rectas EB, EC, ED, EA &c. eodem in plano ductas, & tranſeuntes per concurſum E eiuſdem rectae FE cum ipſo plano.

DEFINITIO II.

Tab. VI. Fig. 28. 349. Si linea FG non ſit recta plano CEOQ, & a ſublimi eius puncto F ad planum ducatur perpendicularis FI, iungaturque GI; angulus FGI dicitur *inclinatio* lineae FG ad idem planum.

DE-

Digitized by Google

DEFINITIO III.

350. Si duo plana ACIH, LSOR ſe mutuo ſecent; linea LS utrique plano communis, horum planorum *ſectio* appellatur. Tab. VI. Fig. 29.

DEFINITIO IV.

351. Planum GROL *rectum* dicitur, ſeu *perpendiculare* ad planum CSVE, cum omnes lineae FA, IH, quae communi planorum ſectioni GL perpendiculares ducuntur in planorum uno GROL, rectae ſunt alteri plano CSVE. Tab. VI. Fig. 30.

DEFINITIO V.

352. Si planum LROS plano ACIH perpendiculariter non inſiſtat, alterius ad alterum *inclinatio* eſt acutus angulus GFQ, quem comprehendunt rectae GF, FQ ad communem ſectionem in utroque plano perpendiculariter ductae. Tab. VI. Fig. 29.

DEFINITIO VI.

353. *Diſtantia* puncti a plano eſt linea breviſſima omnium, quae ex illo ad hoc duci poſſunt.

DEFINITIO VII.

354. *Plana parallela* ſunt, quae quantumvis producta eandem ſemper ſervant diſtantiam inter ſe.

Digitized by Google

COROLLARIVM.

355. Plana igitur parallela nunquam poterunt convenire, alioquin non eandem ubique haberent diſtantiam inter ſe.

DEFINITIO VIII.

Tab.VI. Fig. 31. 356. Si figura rectilinea AGR ſupra immotam rectam AE motu ſibi ſemper parallelo feratur; ſolidum AGROFE inde genitum vocatur *Priſma*, quod *rectum* etiam dici ſolet, ſi AE deſcribenti plano AGR fuerit recta; ſin minus, *obliquum*.

COROLLARIVM I.

357. Priſma igitur oppoſita latera AGR, EFO aequalia habet, ſimilia, & parallela. Nam AGR fluendo per AE motu ſibi ſemper parallelo, tandem congruet cum EFO.

COROLLARIVM II.

358. Quia dum planum AGR motu ſibi parallelo deſcribit priſma AGROFE, latera AG, GR, RA motu ſibi parallelo lata, deſcribunt (152.) parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA; ſequitur, priſma AGROFE tot parallelogrammis circumcirca terminari, quot ſunt latera deſcribentis plani AGR.

DEFINITIO IX.

Tabula VII. Fig. 1. 359. Si planum deſcribens ASCR fuerit parallelogrammum; ſolidum EC inde genitum

Pa-

Digitized by Google

Parallelepipedum nuncupatur, quod *rectum* quidem dicitur, ſi AE perpendicularis ſit deſcribendi plano ASCR; ſin minus, *obliquum*.

COROLLARIVM I.

360. Liquet oppoſita latera ASCR, EFGO aequalia (357.) invicem eſſe, ſimilia, & parallela.

COROLLARIVM II.

361. Patet quoque ſex parallelogrammis parallelepipedum terminari. Vltra enim duo oppoſita ASCR, EFGO, ſunt etiam quatuor alia a parallelo motu (152.) laterum AS, SC, CR, RA generata.

COROLLARIVM III.

362. Quia idem parallelepipedum EC gigni etiam poſſe concipitur ex motu parallelogrammi AEFS ſupra immotam rectam AR, vel ex motu parallelogrammi AEOR ſupra immotam rectam AS; ſequitur, latera oppoſita AEFS, ROGC, nec non AEOR, FSCG aequalia (360.) mutuò eſſe, ſimilia, & parallela.

DEFINITIO X.

363. Si parallelogrammum ASCR ſit quadratum, atque AE ad idem planum recta, ipſi AR ſit aequalis; ſolidum inde genitum *Cubus* dici ſolet, cuius *latus* eſt idem cum latere AR quadrati eiuſdem ASCR.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

364. Cubus igitur ſex quadratis aequalibus terminatur, quorum duo oppoſita ſunt etiam mutuò parallela.

SCHOLION I.

365. Itaque inter figuras ſolidas eum locum obtinet cubus, quem inter planas quadratum tenet; quare ſicuti ope quadrati figuras planas hactenus menſi ſumus, ita & ope cubi ſolidas in poſterum dimetiemur.

SCHOLION II.

366. Igitur quemadmodum numerus pedum quadratorum in figura plana contentorum, eiuſdem aream repraeſentat, ita & numerus pedum cubicorum, qui in figura ſolida continentur, eius menſuram, ſeu ſoliditatem oſtendit.

DEFINITIO XI.

367. *Pes cubicus* cubum ſignificat, cuius latus eſt pede longum.

DEFINITIO XII.

Tabula VIII. Fig. 17. 368. *Centrum* cubi GL eſt punctum I intra illum, quod a ſex quadratis cubum terminantibus aequidiſtat.

DEFINITIO XIII.

Tabula VII. Fig. 2. 369. *Piramis* AFEC eſt ſolidum tot planis

Digitized by Google

nis triangulis ad punctum C convenientibus terminatum, quot latera ſunt baſeos AFE.

DEFINITIO XIV.

370. *Angulus ſolidus* C ille eſt, qui continetur pluribus planis angulis in apicem unum coeuntibus.

DEFINITIO XV.

371. Anguli ſolidi ſunt aequales, qui angulis planis numero, & magnitudine aequalibus continentur.

COROLLARIUM.

372. Itaque ſi angulus unus ſolidus ita poni intelligatur intra alterum ſibi aequalem, ut unius vertex ſupra alterius verticem cadat; tunc ſinguli plani anguli qui ſibi mutuò ſunt aequales, neceſſario (20.) congruent inter ſe, ideoque & anguli ſolidi congruant oportebit.

DEFINITIO XVI.

373. Si extra planum alicuius circuli ASE acceptum fuerit punctum R, ab eoque ducatur indefinita RF tangens circulum in A, quae puncto A fixo manente, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum RAF redeat, unde moveri coeperat; ſuperficies a recta linea RAF deſcripta *conica* appellatur, ſolidum vero, quod a ſuperficie, & circulo ASE continetur, *conus* vocatur. Tabula VII. Fig. 5.

Digitized by Google

DEFINITIO XVII.

374. *Axis* coni eſt recta RC ex vertice R ad baſeos centrum ducta, quae ſi perpendicularis ſit baſi ASE, conum *rectum* efficiet; ſin minus, *obliquum*.

DEFINITIO XVIII.

Tabula VII. Fig. 4. 375. Si rectangulum ASHC circa immotam HC in orbem ducatur, donec ad eum redeat locum, unde moveri coepit; ſolidum SR inde genitum *Cylindrus* dicitur, cuius *axis* eſt immota recta HC, quae ſi perpendicularis ſit baſi AVR, cylindrum efficit *rectum*; ſin minus, *obliquum*.

DEFINITIO XIX.

376. Similes coni, & cylindri ſunt, quorum axes ſunt baſium diametris proportionales, ac praeterea vel ſunt iiſdem baſibus recti, vel ad illas aequaliter inclinati.

DEFINITIO XX.

377. Figurae ſolidae rectilineae ſunt *ſimiles*, quae totidem numero planis, mutuòque ſimilibus continentur.

DEFINITIO XXI.

378. Solidae autem figurae rectilineae ſunt *aequales*, quae ſimilibus planis multitudine, & magnitudine aequalibus continentur.

Digitized by Google

DEFINITIO XXII.

379. Si ſemicirculus AKS circa immotam diametrum AS in orbem ducatur, donec unde moveri coeperat, revertatur; ſolidum inde genitum AKSR *Sphaera* dicitur. Tabula VII. Fig. 5.

CAPVT II.

De planorum concurſu inter ſe, & cum lineis rectis.

PROPOSITIO I.

380. *SI per punctum F ducatur recta EF in uno plano ACIH, recta vero FG in altero LROS; linea EFG non erit recta.* Tab. VI. Fig. 29.

Cum recta EF ſit in plano ACIH, hac ſane, ut libet, ad Q producta, prodibit (63.) recta linea EFQ. Ergo ſi recta quoque foret linea EFG, duae rectae EFQ, EFG tranſirent per duo puncta E, & F, quin mutuò coinciderent, quod eſt (14.) abſurdum. Linea ergo EFG recta non erit. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

381. Igitur rectae lineae pars una nequit eſſe in uno plano, pars vero altera in alio, alioquin recta (380.) non eſſet linea, contra

tra hypotheſim. Ergo in illo plano, in quo eſt pars una lineae rectae, tota quoque recta linea ſita erit.

COROLLARIVM II.

Tabula VII Fig. 6. 382. Hinc quodvis triangulum RAC in uno totum eſt plano. Si enim eiuſdem pars una, veluti SAH eſſet in uno plano, reliqua vero RSHC in altero, utique rectae AR pars una AS foret in uno plano, reliqua vero SR in altero, quod eſt (381.) abſurdum.

COROLLARIVM III.

383. Igitur tria latera cuiuſvis trianguli in eodem prorſus iacebunt (382.) plano, atque adeo per ipſa planum ſemper traduci poterit.

COROLLARIVM IV.

Tabula VII. Fig. 7. 384. Pariter duae rectae CA, FS ſe ſecantes in puncto R erunt poſitae in uno plano. Nam iuncta CS, rectae CR, RS ſunt in plano (383.) trianguli CRS. Ergo etiam totae CA, FS in eodem (381.) trianguli plano erunt, ac proinde in uno plano iacebunt.

COROLLARIVM V.

385. Ergo per duas rectas in aliquo puncto invicem concurrentes, ſemper tranſire (384.) poterit planum.

PRO-

PROPOSITIO II.

386. **R**Ecta HI ſecans binas AG, FS poſitas in eodem plano; in uno erit cum illis plano. Tabula VII. Fig. 8.

Quia recta HI aliam AG ſecat, utique in eodem erit cum illa (384.) plano. Similiter eadem HI ſecans quoque aliam FS, erit (384.) cum illa in eodem plano. Ergo HI erit in plano rectae AG, & in plano rectae FS. Sed rectae AG, FS in uno ſunt (*ex hyp.*) plano. Ergo etiam HI in uno erit cum illis plano. Q. E. D.

COROLLARIUM.

387. Cum binae parallelae in uno ſemper iacere debeant (26.) plano; liquet, quamcumque rectam binas parallelas ſecantem, in uno eſſe cum illis plano.

PROPOSITIO III.

388. **S**I duo plana AS, EV ſe mutuo ſecent; communis ſectio CF linea recta erit. Tabula VII. Fig. 9.

Si ſectio communis CF non ſit linea recta, utique ex puncto C ad aliud F duci poterit in plano AS recta (62.) linea COF. Similiter ex puncto C ad aliud F ducere licebit in plano EV rectam (62.) lineam CHF. Igi-

Igitur duae rectae COF, CHF tranſibunt per duo puncta C & F, quin mutuò coincidant, quod eſt (14.) abſurdum. Quare ſectio CF linea recta erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Tabula VII. Fig. 10. 389. Hinc binae rectae EI, EO ex eodem puncto E ductae, nequeunt eſſe perpendiculares ad idem planum CH. Nam ambae, ſi fieri poteſt, ad idem planum ſint rectae. Ergo ſi per ipſas ducatur (385.) planum GIOE, id priori occurret in (388.) recta GE, rectuſque (348.) erit tàm angulus OEG, quàm IEG. Ergo angulus OEG aequabitur IEG, totum parti, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO IV.

Tabula VII. Fig. 11. 390. *PLanum EFHG ſecans parallela plana AS, CR, in iis facit ſectiones EF, GH invicem parallelas.*

Cum ſectiones EF, GH ſint in planis AS, CR, utique rectae EF, GH utrinque productae, erunt (381.) ſemper in planis AS, CR utrinque continuatis. Verum haec plana utrinque continuata nunquàm poterunt (355.) convenire, cum ſint mutuo parallela; ergo neque unquàm convenient utrinque productae ſectiones EF, GH. Sunt autem ambae in eodem plano (*ex hyp.*) ſecan-

Digitized by Google

cante EFHG. Ergo erunt quoque (28.) mutuò parallelae. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

391. *Binae rectae quaecumque GI, KM a planis parallelis AB, CD, EF ſecantur in eadem ratione in H, & L.* Tabula VII. Fig. 12.

Ducatur KO ad GI parallela, occurrens planis CD, EF in punctis N, O. Quia rectae GK, HN, IO ſunt ſectiones planorum parallelorum cum plano GKOI, parallelae invicem (390.) erunt. Eandem ob cauſam parallelae quoque erunt NL, OM, quae ſunt ſectiones plani OKM cum planis CD, EF parallelis. Ergo in parallelogrammis KGHN, HNOI erunt latera KN, NO aequalia (176.) lateribus GH, HI. Sed propter parallelas LN, MO, eſt KL ad LM, ut (262.) KN ad NO. Ergo erit quoque KL ad LM, ut GH ad HI. Q. E. D.

LEMMA.

392. *Si ex vertice R trianguli iſoſcelis ARC ducatur ad quodvis punctum baſis AC recta linea RS; quadratum lateris RA aequabitur quadrato RS una cum rectangulo ASC.* Tabula VII. Fig. 13. 14.

I. Sit recta RS perpendicularis ad baſim AC, quam proinde bifariam (189.) ſecabit Tabula VII. Fig. 13.
in

in puncto S. Igitur quadratum AS aequabitur rectangulo ASC, additoque utrinque RS quadrato, ſumma quadratorum RS, AS aequabitur quadrato RS una cum rectangulo ASC. Sed ſumma quadratorum RS, AS aequatur (311.) quadrato RA. Igitur RA quadratum aequabitur quadrato RS una cum rectangulo ASC.

Tabula VII. Fig. 14. II. Sin vero RS non ad angulos rectos occurrat baſi in S, tunc ex vertice R demittatur ad baſim AC perpendicularis RE, quae bifariam (189.) ſecabit baſim in E. Igitur AC quae biſecta eſt in E, diviſa quoque erit in partes inaequales in puncto S, atque adeo quadratum AE aequabitur (318.) quadrato SE una cum rectangulo ASC, additoque utrinque quadrato RE, ſumma quadratorum RE, EA, ſeu quadratum (311.) RA aequabitur quadratis SE, RE una cum rectangulo ASC, ſeu aequabitur (311.) quadrato RS una cum rectangulo ASC. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Tabula VII. Fig. 15. 393. *SI recta quaepiam AC fuerit perpendicularis ad binas OE, SK ductas per punctum C in eodem plano SOKE; etiam perpendicularis erit cuivis alteri VF per idem punctum C in eodem plano traductae.*

Sumptis aequalibus CE, CR iungatur RE, quae alteri VF occurret in puncto H, ducan-

canturque AR, AH, AE. Cum (*ex hyp.*) recti ſint, ſeu aequales anguli ACR, ACE, & latera AC, CR aequentur (*ex conſtr.*) lateribus AC, CE; utique AR ipſi AE erit (106.) aequalis, atque iſoſceles erit triangulum RAE. Ergo quadratum AH una cum rectangulo RHE aequabitur (392.) quadrato AR, ſeu (311.) quadratis AC, CR. Sed in triangulo (*ex conſtr.*) iſoſcele RCE quadratum CR aequale eſt (392.) quadrato CH una cum rectangulo RHE; ergo quadratum AH una cum rectangulo RHE aequabitur quadratis AC, CH una cum rectangulo RHE, & ablato hinc inde rectangulo RHE, quadratum AH aequabitur quadratis AC, CH, rectuſque (325.) proinde erit angulus ACH, & AC perpendicularis ad rectam lineam VCF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

394. Hinc eadem recta AC, quae perpendicularis eſt ad binas OE, SK, perpendicularis (348.) quoque erit plano SOKE. Eſt enim perpendicularis (393.) ad ſingulas rectas per punctum C in eodem plano traductas.

COROLLARIUM II.

395. Patet quoque, quod ſi ex aliquo puncto C cuiuſpiam rectae AC exeant tres rectae CE, CD, CF ipſi perpendiculares; hae in eodem plano iacebunt. Nam ſi ducto Tabula VII. Fig. 15.

(385.)

Digitized by Google

(385.) plano EH per duas CE, CD, tertia CF non ſit in illo eodem plano, ducto (385.) plano GACB per binas AC, CF, quod priori occurret in aliqua (388.) recta CB; utique recta AC perpendicularis (*ex hyp.*) binis CD, CE, erit perpendicularis (393.) & ipſi CB, unde angulus ACB rectus erit, & aequalis recto (*ex hyp.*) alteri ACF, quod eſt abſurdum.

COROLLARIUM III.

Tabula VII. Fig. 17. 396. Pariter ſi ſphaeram tangat planum QN in O; recta AO ex centro ad contactum ducta perpendicularis erit tangenti plano. Nam ſi planum tangens QN, & ſphaera ſecentur per centrum A, & tactum O duobus planis, quorum communis ſectio ſit AO, & quae in ſphaera producent quidem circulos OG, OD, in plano autem QN rectas (388.) CO, IO; utique hae tangent circulos OG, OD eodem in puncto O, atque adeo radius AO perpendicularis (126.) erit ad binas CO, IO, & idcirco perpendicularis (494.) tangenti plano QN.

SCHOLION.

Tabula VII. Fig. 17. 397. Hinc ſi globus perfectè levigatus incumbat horizontali plano QN itidem levigato, ac tellurem tangenti in O; is non quieſcet, niſi collocatus fuerit ad punctum O. Ponatur enim globus ad punctum I, & iungatur AI. In triangulo rectangulo AOI

Digitized by Google

latus AI angulo recto oppoſitum, maius eſt (181.) quam AO, ideoque globus in I quieſcere nequit, ſed vi gravitatis impulſus, debet deſcendere verſus O, ut inde ad telluris centrum magis accedat.

PROPOSITIO VII.

398. *Ex puncto ſublimi O demittere ad planum AC perpendicularem OR.* Tabula VII. Fig. 18.

Ducta quavis recta FL in plano dato, ducatur (112.) ex O perpendicularis OH in ipſam, & HS eidem (87.) perpendicularis in plano dato, ad quam ex O demittatur (112.) perpendicularis OR, quae perpendicularis quoque erit ad planum datum AC. Nam ob rectum (*ex conſtr.*) angulum OHL, quadratum OL aequabitur (311.) quadratis OH, HL; ſed ob rectum (*ex conſtr.*) quoque angulum ORH, quadratum OH aequale eſt (311.) quadratis OR, RH. Ergo quadratum OL aequabitur quadratis OR, RH, HL. Demum ob rectum (*ex conſtr.*) angulum LHR, duo quadrata RH, HL aequantur (311.) quadrato LR; ergo quadratum OL aequatur quadratis LR, OR, rectuſque (315.) proinde erit angulus ORL. Sed rectus quoque factus eſt angulus ORH. Ergo OR perpendicularis eſt ad binas RL, RH, atque adeo etiam (394.) perpendicularis ad planum datum AC. Q. E. F.

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII.

Tab. VI. Fig. 28. 399. *Perpendicularis FI a puncto F ad planum CO ducta, minima eſt omnium rectarum, quae ab illo ad planum duci queunt.*

Ducatur a puncto F ad planum quaevis alia recta FG, & iungatur GI. Cum FI perpendicularis ſit ad planum CO, utique rectus erit (348.) angulus FIG, ac proinde acutus erit (165.) alter angulus FGI. Igitur latus FI latere FG minus (181.) erit. Eodem modo demonſtrabitur perpendicularem FI minorem eſſe alia quacumque recta a puncto F ad planum ducta. Ergo omnium minima eſt FI. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

400. Cum unica tantum recta omnium minima demitti queat ex puncto ſublimi F ad planum datum CO; unica quoque ex puncto F ad idem planum poteſt duci perpendicularis FI.

COROLLARIUM II.

401. Similiter quia diſtantia puncti F a plano CO eſt recta minima (353.) omnium, quae ex illo puncto ad planum duci poſſunt; ſequitur perpendicularem FI eſſe diſtantiam puncti F ab eodem plano CO.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM III.

402. Quoniam *altitudo* cuiuſvis ſolidi AEFC eſt diſtantia verticis C a baſi AEF; perpendicularis CS ex vertice ad baſim ducta, altitudinem ſolidi exhibebit. Tabula VII. Fig. 2.

COROLLARIVM IV.

403. Cum planorum parallelorum diſtantiae (354.) ſint aequales; aequabuntur rectae omnes ex uno plano ad ſibi parallelum perpendiculariter ductae.

COROLLARIVM V.

404. Et contra ſi aequentur rectae omnes ex uno plano ad aliud perpendiculariter ductae; duo haec plana eamdem ubique (401.) ſervabunt diſtantiam inter ſe, atque adeo erunt mutuo (354.) parallela.

PROPOSITIO IX.

405. *Lineae rectae IG, OE, quae eidem plano CH ſunt perpendiculares, ſunt quoque invicem parallelae.* Tabula VII Fig. 10

Iunctà GE, agatur in plano CH linea EF perpendicularis ad GE, & aequalis ipſi IG, iunganturque EI, FI, FG. Cum in triangulis IGE, GEF duo latera IG, GE aequentur (*ex conſtr.*) duobus FE, EG, & rectus (348.) angulus IGE aequalis ſit (*ex*

 conſtr.)

Digitized by Google

conſtr.) recto FEG, liquet reliqua latera IE, GF aequalia (106.) etiam eſſe. Igitur triangula IGF, IEF ſunt mutuò aequilatera, ac proinde (83.) anguli IGF, IEF aequales. Sed IGF rectus (348.) eſt; ergo rectus quoque erit IEF. Recti autem ſunt anguli (*ex conſtr.*) GEF (348.), OEF. Ergo FE perpendicularis erit ad tres rectas EG, EI, EO, atque adeo OE eſt in plano (395.) rectarum EI, EG. Sed etiam IG in eodem eſt plano (382.) rectarum EI, EG. Ergo rectae IG, OE in eodem ſunt plano, quae idcirco ob rectos (348.) internos angulos IGE, OEG, erunt (149.) mutuò parallelae. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Tabula VII. Fig. 10. 406. *SI parallelarum IG, OE una IG perpendicularis ſit ad planum CH, etiam altera OE perpendicularis erit ad idem planum.*

Ductis EG, IE, in plano CH fiat EF perpendicularis ad GE, & aequalis ipſi IG, iunctiſque FI, FG, oſtendam ut (405.) ſupra, rectam FE perpendicularem eſſe ad EI. Sed perpendicularis quoque (*ex conſtr.*) eſt ad EG; ergo perpendicularis erit ad binas EG, EI. Sed hae ſunt (387.) in plano GIOE, in quo nempe iacent parallelae IG, OE. Ergo FE perpendicularis quoque erit ad (394.) planum GIOE, rectuſque proin-

proinde erit (348.) angulus OEF. Sed propter parallelas IG, OE, & rectum (348.) angulum IGE, rectus quoque (132.) eſt angulus OEG. Ergo OE perpendicularis erit ad binas EF, EG, atque adeo etiam (394.) ad planum CH. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

407. Hinc ex puncto G ad planum CH excitabitur perpendicularis GI, ſi ex quovis puncto O extra planum demiſſa (398.) perpendiculari OE, huic agatur ex G parallela GI.

COROLLARIUM II.

408. Si per FA perpendicularem plano SE, traiiciatur quodvis planum GROL, hoc quoque perpendiculare erit eidem plano. Nam ſi ex quolibet puncto I plani GROL demittatur ad communem ſectionem GL perpendicularis IH, rectus erit (348.) angulus IHA; ſed rectus quoque (348.) eſt angulus FAH, quippe FA ſupponitur ad planum recta. Ergo duobus rectis aequantur duo interni anguli IHA, FAH, & proinde parallelae (149.) erunt FA, IH; ſed FA eſt perpendicularis plano SE. Ergo etiam IH perpendicularis erit (406.) eidem plano, atque idcirco planum GROL perpendiculare (351.) erit ad idem planum SE. Tab. VI. Fig. 30.

COROLLARIUM III.

409. Similiter rectae KO, HF eidem GR pa- Tab. VI. Fig. 19.

Digitized by Google

parallelae, licet non ſint cum illa in eodem plano, ſunt etiam mutuo parallelae. Nam ſi in plano parallelarum KO, GR ducta AL perpendiculari (112.) ad GR, huic ex L excitetur (87.) perpendicularis LE in plano parallelarum HF, GR, & iungatur AE, utique GR perpendicularis erit ad binas LA, LE, atque idcirco recta (394.) erit ad planum trianguli ALE. Ergo etiam rectae KO, HF, quae ſunt eidem GR parallelae, perpendiculares (406) erunt eidem plano, ac proinde etiam mutuo (405.) parallelae.

PROPOSITIO XI.

Tabula VII. Fig. 20. 410. *SI eadem recta OE perpendicularis ſit ad duo plana MN, RS; plana haec erunt invicem parallela.*

Sumatur in plano MN quodlibet punctum F, atque ex hoc ad planum aliud RS demittatur perpendicularis FH, quae (405.) erit ipſi OE parallela, ideoque etiam (406.) perpendicularis plano MN. Igitur iunctis OF, EH, recti (348.) prodibunt quatuor anguli E, H, F, O, unde quadrilaterum EOFH rectangulum (44.) erit, in quo proinde latus FH oppoſito OE erit (177.) aequale. Recta ergo FH, quae perpendicularis eſt ad planum RS, alteri OE erit aequalis. Eodem ratiocinio oſtendam omnes rectas a plano MN ad aliud RS perpendicu-

dicılariter ductas, eidem OE eſſe aequales; ergo duo plana MN, RS erunt (404.) invicem parallela. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

411. *SI binae rectae mutuo ſe tangentes OA, OV ad binas alias ſe mutuo tangentes RI, RQ ſint parallelae; etiam plana per ipſas ducta erunt invicem parallela.* Tabula VII. Fig. 20.

Ex O demiſſa OE recta (398.) ad planum RS, in hoc agatur EL ipſi RI parellela. Quia OA, EL ſunt ipſi RI parallelae, utique (409.) parallelae quoque inter ſe erunt, ac proinde duobus rectis aequabuntur (134.) interni anguli AOE, OEL. Sed ob OE rectam plano RS, rectus eſt (348.) angulus OEL. Ergo rectus quoque erit reliquus AOE. Simili modo ducta EH ad RQ parallela, oſtendam rectum eſſe angulum VOE. Igitur EO perpendicularis eſt ad duas OA, OV, atque adeo perpendicularis erit etiam (394.) plano MN. Sed perpendicularis eſt (*ex conſtr.*) quoque plano RS. Ergo perpendicularis erit utrique plano, ac proinde plana MN, RS erunt (410.) invicem parallela. Q. E. D.

LEMMA.

412. *SI binae rectae OA, OV ſint parallelae ad binas RI, RQ in eodem exi-* Tabula VII. Fig. 21.

 ſten-

Digitized by Google

ſtentes cum illis plano ; aequales comprehendent angulos AOV , IRQ .

Ducta per O , & R recta OH , internus angulus AOH aequalis erit (134.) externo IRH . Eodem ratiocinio oſtendam internum angulum VOH aequari externo QRH ; ergo totus angulus AOV aequabitur toti IRQ . Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

Tabula VII. Fig. 20. 413. S*I binae rectae OA , OV ſint parallelae ad binas RI , RQ non in eodem exiſtentes cnm illis plano ; aequales comprehendent angulos AOV , IRQ .*

Quia binae OA , OV parallelae ſunt ad binas RI , RQ , plana per ipſas ducta , erunt (411.) mutuo parallela , unde ſi ex punctis quibuslibet O , F , G demittantur ad planum IQ perpendiculares OE , FH , GL , hae utique (403.) aequales erunt , & mutuo (405.) parallelae , proindeque aequales (151.) quoque , ac parallelae erunt EH , OF , nec non HL , FG , itemque EL , OG . Igitur triangula GOF , LEH ſunt mutuo aequilatera , & (83.) angulus GOF , ſive AOV aequabitur LEH . Iam vero (*ex hyp.*) RQ eſt ad OF parallela , atque ad eandem OF vidimus parallelam eſſe EH ; ergo erunt quoque (409.) parallelae RQ , EH . Eodem modo

do

Digitized by Google

do oſtendam parallelas quoque eſſe RI, EL; ergo angulus LEH (412) aequabitur IRQ: Oſtendi autem angulum AOV ipſi LEH eſſe aequalem; ergo etiam angulus AOV aequabitur IRQ. Q. E. D.

CAPVT III.

De Parallelepipedorum, & Priſmatum ſymptomatis, ac menſuris.

PROPOSITIO XIV.

414. *IN quovis parallelepipedo RH planum tranſire poteſt per adverſorum planorum diagonales AC, EG.* Tabula VII. Fig. 22.

In parallelogrammo FRCG eſt CG parallela (48.) ad RF, & in parallelogrammo altero RAEF eſt AE ad (48.) eandem RF parallela; ergo (409.) parallelae etiam inter ſe erunt CG, AE, quae idcirco in uno (26.) plano iacebunt. Ergo utramque ſecantes AC, EG in uno (387.) erunt cum illis plano, atque adeo per rectas AC, EG tranſire poterit planum. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

415. *PLanum traductum per diagonales AC, EG parallelepipedum ſecat in duo aequalia priſmata.* Tabula VII. Fig. 22.

Quia

Digitized by Google

Quia in parallelogrammo RALC praeter oppoſitos (135.) aequales angulos R, L, etiam anguli RAC, ACR aequantur (134.) alternis ACL, LAC, triangula ARC, ALC, quae aequalia (176.) invicem ſunt, ſimilia (274.) quoque erunt. Idem dicendum de triangulis EFG, EHG. Sunt vero aequalia, & ſimilia parallelogramma (362.) oppoſita RAEF, CLHG, nec non RCGF, ALHE, & demum parallelogrammum ACGE utrique priſmati eſt commune. Ergo priſmata ARCGFE, ALCGHE continentur ſimilibus, & aequalibus multitudine, & magnitudine planis, ac proinde aequalia (378.) invicem erunt. Q. E. D.

COROLLARIUM.

416. Hinc priſma alterutrum ARCGFE dimidium erit parallelepipedi RH.

PROPOSITIO XVI.

Tabula VII. Fig. 23. 417. *Parallelepipeda FPKHLOGA, FRQHLVEA, quae eandem habent baſim AFHL, & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana AFHL, GPQV, ſunt aequalia.*

Parallelepipedum FPKLOGA in duo alia dividatur ope plani RCSE adverſis planis AFPG, LHKO paralleli, iunganturque RH, EL. Priſma FRCSEA dimidium eſt (416.)

pa-

parallelepipedi FPRCSEGA. Similiter priſma CRHLES dimidium eſt (416.) parallelepipedi CRKHLOES. Ergo totum priſma FRHLEA dimidium erit parallelepipedi FPKHLOGA; eſt autem dimidium (416.) quoque parallelepipedi FRQHLVEA. Ergo parallelepipedum FPKHLOGA aequatur alteri FRQHLVEA. Q. E. D.

COROLLARIVM.

418. Si parallelogrammum AGOL ſumatur pro baſi parallelepipedi FPKHLOGA, alterum vero parallelogrammum AEVL priori (203.) aequale, ſumatur pro baſi alterius parallelepipedi FRQHLVEA; haec parallelepipeda aequales baſes habebunt, eruntque aeque (403.) alta, cum ſint inter plana parallela EPQH, AGVL. Igitur aequalia (417.) erunt parallelepipeda aeque alta, quorum baſes ſunt parallelogramma aequalia inter parallelas lineas conſtituta.

PROPOSITIO XVII.

419. *Menſura cuiuſvis parallelepipedi recti RG habentis rectangulam baſim AROE, eſt productum ex baſi eadem in altitudinem RL ducta.* Tabula VII. Fig. 24.

Latera RA, RO, & altitudo RL in partes quotcumque, veluti in pedes diviſa concipiantur. Horum pedum tres ſunto ex. gr.

in

in RL, duo in RO, & quatuor in RA, ut inde baſis AROE conſtet pedibus quadratis bis quatuor, nempe octo. Deinde eadem baſis AROE ferri intelligatur verſus LSG ea lege, ut ſibi ipſi ſemper maneat parallela. Sane dum abſolverit pedem unum EF, liquet ſingulos eius pedes unum pedem cubicum deſcripſiſſe, baſim vero ipſam octo. Rurſus ubi abſolverit ſecundum pedem FH, ſinguli pedes quadrati baſis produxerunt denuo pedem cubicum unum, baſis vero octo. Demum quando baſis pervenerit in LSG, hoc eſt ubi totum parallelepipedum deſcripſerit, manifeſtum eſt ipſam pedes cubicos ter octo, ſeu viginti-quatuor produxiſſe. Igitur pedes cubici in parallelepipedo recto RG contenti, viginti quatuor erunt, quot nempe emergunt, ſi numerus pedum quadratorum baſeos AROE per numerum pedum altitudinis RL multiplicetur. Quare (366.) menſura parallelepipedi recti RG eſt productum ex baſi eadem in altitudinem ducta. Q. E. D.

Scholion.

420. Eadem demoſtratio habet locum etiam dum rectae RA, RO, RL incommenſurabiles ſupponuntur, dummodo numerus partium aequalium, in quas illae diviſae ſunt, augeatur, & magnitudo minuatur in infinitum, ut ea quae ſuperſunt, & contemnuntur indefinité parva evadant.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

421. Quia cubus SO parallelepipedum eſt, cuius altitudo AS (363.) adaequat latus AE baſis quadratae AROE; huius quoque menſura erit productum ex quadrato AROE in altitudinem AS, ſive in latus AE. Igitur poſita AE 3. pedum, 9. pedum quadratorum erit quadratum AROE, & cubus SO 27. pedes cubicos continebit. Tabula VII. Fig. 25.

COROLLARIUM II

422. Liquet ex dictis dimenſio muri, cuius ubique eadem eſt craſſities. Ille ſiquidem habendus eſt veluti parallelepipedum rectum, cuius longitudo, latitudo, atque profunditas ſit prorſus eadem, quae in muro.

COROLLARIUM III.

423. Menſuram quoque corporis cuiuſcumque ſequenti methodo adinvenies. Immergatur corpus parallelepipedo IA recto & cavo, atque ipſi affusâ aquâ, probè obſerva altitudinem aquae AB ſupra idem corpus. Deinde extracto corpore, nota denuo altitudinem aquae AC. Demum ex AB ſubtrahe AC rectam, ut ſuperſtes ſit CB: dico, menſuram corporis quod aquae immerſum erat, eſſe productum ex area rectanguli FCG ducta in rectam CB. Nam huiuſmodi corpus aequatur parallelepipedo recto DFCGE habenti pro baſi aream FCG, & pro altitudi- Tab. IX. Fig. 6.

ne

ne CB rectam ; ſed parallelepipedi huius menſura eſt productum ex eius baſi FCG in altitudinem CB (419) ducta. Ergo idem productum erit quoque menſura corporis dati.

PROPOSITIO XVIII.

Tabula VII Fig. 26. 424. *Menſura parallelepipedi recti SO habentis parallelogrammam baſim AROE, ex productum ex eadem baſi in altitudinem AS ducta.*

Ex A, & E demiſſis (112.) ad RO perpendicularibus AF, EV, intelligatur ſuper rectangulam baſim AFVE conſtitui parallelepipedum rectum, & aeque altum, quod recto SO erit (417.) aequale. Porro parallelepipedi illius menſura eſt productum (419.) ex rectangula baſi AFVE in altitudinem AS; ergo & menſura parallelepipedi SO erit productum ex eadem baſi AFVE in altitudinem AS. Sed baſis AFVE (203.) aequatur baſi AROE; ergo etiam menſura parallelepipedi SO erit productum ex baſi AROE in altitudinem AS. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

Tabula VII. Fig. 27. 425. *Menſura parallelepipedi obliqui RH eſt productum ex baſi FEHG in altitudinem RV.*

Su-

Supra baſim FEHG conſtitui intelligatur parallelepipedum rectum, & aeque altum, quod ſane obliquo RH erit (417.) aequale. Sed recti illius menſura eſt productum (419.) ex baſi FEHG in altitudinem RV. Ergo idem productum menſura quoque erit obliqui RH. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

426. *Menſura cuiuſvis priſmatis triangularis RACGEF eſt productum ex baſi FEG in altitudinem RV.* Tabula VII. Fig. 27.

Completo parallelogrammo FEHG, concipiatur ſupra illud erectum parallelepipedum aeque altum RH. Priſma RACGEF dimidium eſt (416.) parallelepipedi RH; ſed huius menſura eſt productum (419. 424. 425.) ex baſi FEHG in altitudinem RV. Ergo menſura priſmatis eſt productum ex dimidia baſi FEHG in altitudinem RV. Sed triangulum FEG, quod baſis eſt priſmatis, dimidium eſt (176.) parallelogrammi FEHG. Ergo menſura priſmatis RACGEF erit productum ex baſi FEG in altitudinem RV. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

427. Hinc menſura cuiuſvis priſmatis polygoni AH eſt productum ex eius baſi in altitudinem ducta. Nam hoc priſma polygonum Tabula VII. Fig. 28.

Digitized by Google

gonum in triangularia aequè alta reſolvi poteſt, quorum baſes ſunt triangula SVO, OVH, HVG. Ergo cum ſingula haec priſmata pro menſuris habeant producta ex ſingulis baſibus in communem altitudinem (426.) ductis, ſequitur illorum ſummam, ſeu priſma polygonum menſurari, ſi baſis polygona SVGHO per altitudinem multiplicetur.

COROLLARIUM II.

428. Si baſis SVGHO fuerit polygonum regulare circulo circumſcriptum, cuius laterum numerus augeatur, & magnitudo minuatur in infinitum, polygonum (212.) pro circulo, & priſma polygonum pro cylindro poterit uſurpari. Ergo & menſura cylindri erit productum ex baſi in altitudinem ducta.

COROLLARIUM III.

429. Cum priſmatis cuiuſvis menſura habeatur ex baſis area in altitudinem (427.) ducta; liquet quaecumque priſmata fore aequalia, ſi fuerint aequè alta, & aequales baſes habuerint.

PROPOSITIO XXI.

Tabula VIII. Fig. 1. 2. 430. *Parallelepipeda, priſmata, & cylindri ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.*

Sunto duo parallelepipeda AF, EV, quo-

quorum baſes L, S, altitudines vero AH, EG. Ratio compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG eſt illa, quam habet productum (235.) ex antecedentibus, nimirum ex baſi L in altitudinem AH ad productum ex conſequentibus, nempe ex baſi S in altitudinem EG. Sed ſolidi AF menſura eſt productum (419. 424. 425.) ex baſi L in altitudinem AH, & menſura ſolidi EV eſt productum ex baſi S in altitudinem EG. Ergo ratio compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG eadem eſt cum ratione ſolidi AF ad ſolidum EV. Haec ergo ſolida in eadem compoſita ratione erunt. Eadem demonſtratio in cylindris, & priſmatibus locum habet. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

431. Cum etiam cubi AF, EV ſint parallelepipeda, illi quoque (430.) erunt in ratione compoſita baſium L, S, & altitudinum AH, EG. Tabula VIII. Fig. 3. 4.

COROLLARIUM II.

432. Similiter cum in quadratis L, S aequentur recti anguli H, G, utique ratio (331.) baſium L, S compoſita erit ex rationibus HR ad GP, & HO ad GI. Igitur ratio cubi AF ad alium EV compoſita (431.) erit ex tribus rationibus aequalibus, nimirum HR ad GP, HO ad GI,

Digitized by Google

& AH ad EG, ſeu triplicata (237.) erit rationis lateris HO ad latus GI.

COROLLARIUM III.

433. Quoniam igitur ratio cuborum AF, EV eadem eſt cum ratione ſuorum laterum (432.) triplicata, inde fit, ut ratio triplicata quantitatum quarumvis per rationem cuborum earumdem quantitatum ſaepiſſime deſignetur.

PROPOSITIO XXII.

Tabula VIII. Fig. 3. 4. 434. *Cubus AF eſt ad cubum EV in ratione compoſita quadrati lateris HO ad quadratum lateris GI, & lateris HO ad latus GI.*

Cubus AF eſt ad cubum EV in ratione (431.) compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed baſis L eſt ad baſim S, ut quadratum lateris HO ad quadratum lateris GI, & altitudo AH eſt ad altitudinem EG, ut latus HO ad GI; ergo etiam cubus AF erit ad cubum EV in ratione compoſita quadrati lateris HO ad quadratum lateris GI, & lateris HO ad latus GI. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

Tabula VIII. Fig. 5. 435. *Si quatuor rectae A, E, C, F fuerint proportionales, illarum quoque cubi proportionales mutuò erunt.* Quia

Digitized by Google

Quia A eſt ad E, ut (*ex hyp.*) C ad F, ratio A ad E eadem erit cum ratione C ad F, & ratio quadrati A ad quadratum E eadem erit cum ratione (339.) quadrati C ad quadratum F. Igitur ratio compoſita quadrati A ad quadratum E, & rectae A ad E eadem erit cum ratione compoſita quadrati C ad quadratum F, & rectae C ad F. Sed cubus A eſt ad cubum E in ratione compoſita (434.) quadrati A ad quadratum E, & rectae A ad E, itemque cubus C eſt ad cubum F in ratione compoſita (434.) quadrati C ad quadratum F, & rectae C ad F; ergo etiam cubus A erit ad cubum E, ut cubus C ad cubum F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

436. *PRoportionem parallelepipedorum, cylindrorum, ac priſmatum exhibere.*

Sunto duo parallelepipeda AF, EV, in quibus baſis L ſit (330.) ad baſim S, ut recta CO ad Z, & altitudo AH ad altitudinem EG, ut recta Z ad M: dico ſolidum AF eſſe ad aliud EV, ut recta CO ad M. Nam ſolidum AF eſt ad ſolidum EV in ratione (430.) compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed ratio baſis L ad baſim S eadem eſt ac (*ex conſtr.*) ratio CO ad Z, & ratio altitudinis AH ad altitudinem EG eadem eſt Tabula VIII. Fig 1. 2.

Digitized by Google

ac (*ex conſtr.*) ratio Z ad M. Ergo etiam ſolidum AF erit ad ſolidum EV in ratione compoſita rectae CO ad Z, & eiuſdem Z ad M, hoc eſt (329.) ut recta CO ad M. Idem de cylindris, & priſmatibus eſt dicendum. Q. E. F.

COROLLARIUM I.

Tabula VIII. Fig. 6. 7. 437. Hinc aeque alta parallelepipeda AF, EV rationem baſium habent. Nam cum (*ex conſtr.*) AH ſit ad EG, ut Z ad M, ſintque (*ex hyp.*) aequales AH, EG, utique etiam rectae Z, M aequari mutuò debent, atque adeo CO erit ad Z, ut (224.) eadem CO ad M. Sed ſolidum AF eſt ad aliud EV, ut (436.) recta CO ad M. Ergo etiam ſolidum AF erit ad aliud EV, ut recta CO ad Z, ſive (*ex conſtr.*) ut baſis L ad baſim S. Eadem demonſtratio priſmatibus quoque convenit, ac cylindris.

COROLLORIUM II.

Tabula VII Fig. 26. 27. 438. Si parallelepipedum SO, & priſma triangulare CRAEFG aequales habeant altitudines SA, RV; erunt ipſa inter ſe, ut baſes AROE, GEF. Nam completo parallelogrammo GHEF, ſuperque illud erecto parallelepipedo CE eiuſdem cum priſmate altitudinis, utique (437.) parallelepipedum SO ad CE erit, ut baſis AROE ad baſin GHEF. Sed (416.) parallelepipedum CE eſt ad priſma CRAEFG, ut 2. ad 1., ſive (176.) ut illius baſis GHEF

ad

ad huius baſin GEF. Ergo ex aequo parallelepipedum SO erit ad aequè altum priſma CRAEFG, ut baſis AROE ad baſim GEF.

COROLLARIUM III.

439. Hinc ſi areae parallelogrammi AROE, & trianguli GEF multiplicentur per rectas aequales SA, RV, quae perpendiculares ſint ad areas illas; producta erunt, ut ipſae areae multiplicatae. Sunt ſiquidem haec producta, ut ſolida SO, CRAEFG aequè alta, quae (438.) ſunt ut baſes, ſive areae AROE, GEF.

PROPOSITIO XXV.

440. *Aequalia parallelepipeda, priſmata, & cylindri reciprocant baſes, & altitudines. Et ſi reciprocant baſes, & altitudines, ſunt aequalia.*

I. Sunto parallelepipeda AF, EV, quorum baſes L, S ſint, ut rectae CO, Z, & altitudines AH, EG, ut rectae Z, M, eritque ſolidum AF ad aliud EV, ut (436.) recta CO ad M. Sed ſolidum AF alteri (*ex hyp.*) EV eſt aequale. Ergo & CO aequabitur ipſi M. Igitur (223.) CO erit ad Z, ut M ad Z. Sed CO eſt ad Z, (*ex conſtr.*), ut baſis L ad baſim S, & M eſt ad Z (*ex conſtr.*), ut altitudo EG ad altitu- Tabula VIII. Fig. 8. 9.

 tu-

Digitized by Google

tudinem AH. Igitur baſis L erit ad baſim S, ut altitudo EG ad altitudinem AH.

II. Baſis L eſt (*ex hyp.*) ad baſim S, ut altitudo EG ad altitudinem AH. Sed baſis L eſt (*ex conſtr.*) ad baſim S, ut recta CO ad Z, & (*ex conſtr.*) altitudo EG ad altitudinem AH, ut M ad Z. Ergo etiam CO erit ad Z, ut M ad eandem Z, ac proinde CO aequabitur (225.) ipſi M. Sed ſolidum AF eſt (436.) ad EV, ut recta CO ad M. Ergo etiam ſolidum AF ſolido EV erit aequale. Eadem demonſtratio in cylindris, ac priſmatibus locum habet. Q. E. D.

CAPUT IV.

De Pyramidum, Conorumque ſymptomatis, & menſuris.

PROPOSITIO XXVI.

Tabula VIII. Fig. 10. 441. *Quaevis ſectio triangularis pyramidis facta plano ad baſim parallelo, eſt figura prorſus ſimilis baſi.*

Pyramis AGCF ſecetur plano SOE ad baſim GAC parallelo: dico ſectionem SOE prorſus ſimilem eſſe baſi. Nam cum planum GFC ſecet parallela plana SOE, GAC, efficiet (390.) ſectiones SE, GC parallelas. Eandem ob cauſam rectae OS, OE parallelae erunt rectis AG, AC, ideoque ſinguli

guli

Digitized by Google

guli anguli E, O, S trianguli SOE aequantur (413.) ſingulis C, A, G trianguli GAC. Igitur triangularis ſectio SOE ſimilis (274) erit baſi GAC. Q. E. D.

COROLLARIUM.

442. Sectio SOE erit ad baſim GAC, ut quadratum diſtantiae ipſius a vertice ad quadratum diſtantiae baſis ab eodem, nimirum ut quadratum EF ad quadratum CF. Nam propter parallelas SE, GC, triangulum SFE ſimile eſt (276.) alteri GFC, unde SE eſt ad GC, ut EF ad CF, & quadratum SE erit (339.) ad quadratum GC, ut quadratum EF ad quadratum CF. Sed ſectio SOE eſt (337.) ad baſim ſimilem GAC, ut quadratum SE ad quadratum GC; ergo eadem ſectio ad baſim erit, ut quadratum EF ad quadratum CF.

PROPOSITIO XXVII.

443. *SI binae pyramides triangulares AGCF, IVQL ſecentur planis EOS, ZRX ad baſes parallelis, quae dividant latera FC, LQ proportionaliter in E, & Z; ſectiones erunt baſibus proportionales.* Tabula VIII. Fig 10. 11.

Quia rectae FC, LQ proportionaliter ſunt (*ex hyp.*) ſectae in E, & Z, utique EF erit ad CF, ut ZL ad QL, & (339.) quadratum EF erit ad quadratum CF, ut quadratum ZL ad quadratum QL. Sed ſectio

Digitized by Google

SOE eſt (441.) ad baſim GAC, ut quadratum EF ad quadratum CF, & ſectio XRZ eſt ad baſim VIQ, ut quadratum ZL ad quadratum QL. Ergo ſectio SOE erit ad baſim GAC, ut ſectio XRZ ad baſim VIQ, & permutando ſectio SOE erit ad ſectionem XRZ, ut baſis GAC ad baſim VIQ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

Tabula VIII. Fig. 12. 444. *SI pyramidi triangulari ZCAF ſine fine priſmata inſcribantur, illorum ſumma pro menſura pyramidis ſumi poteſt.*

Dividatur latus FA in quotcumque aequales partes AS, SG, GF, & per puncta S, G factis ſectionibus SER, GLQ ad baſim AZC parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia VESA, KLGS, quibus deinde extra pyramidem productis, concipiantur pyramidi circumſcripta priſmata CISA, ROGS, QHFG. Exceſſus circumſcriptorum priſmatum ſupra inſcripta, ſunt ſolida HG, OK, IV, quae ſimul ſumpta aequantur priſmati CISA. Nam priſma HG aequale (429.) eſt LS, ac proinde HG cum OK aequatur ROGS, hoc eſt (429.) VESA, quare tria ſolida HG, OK, IV aequantur priſmati CISA. Iam vero ſi AF in plures ſine fine partes aequales dividatur, atque adeo in infinitum priſmatum nume-

me-

merus augeatur, recta AS quavis data minor evadet, unde etiam priſma CISA fiet quovis dato minus. Igitur exceſſus priſmatum circumſcriptorum (multòque magis pyramidis ZCAF) ſupra inſcripta priſmata quovis dato minor evadet, qui proinde erit meritò contemnendus. Itaque ſumma priſmatum ſine fine pyramidi inſcriptorum, pro menſura pyramidis ſumi poteſt. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

445. *Pyramides triangulares aequè altae QRAC, SFEZ ſunt inter ſe, ut baſes QRA, SFE.* Tabula VIII. Fig. 13. 14.

Pyramidum altitudines aequales referant latera AC, EZ, quibus in quot placuerit aequales partes, & aequè multas diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſim parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta priſmata aequè multa, & aequè alta. Quia latera AC, EZ proportionaliter (*ex conſtr.*) ſecta ſunt in V, & H, ſectiones LOV, IKH erunt (443.), ut baſes QRA, SFE. Sed (437.) priſmata aequé alta LOVA, IKHE ſunt, ut ſectiones LOV, IKH. Ergo erunt etiam ut baſes QRA, SFE. Eodem ratiocinio conſtabit, priſma GPNV eſſe ad aliud CDTH, ut baſis QRA ad baſim SFE. Ergo (226.) priſma LOVA erit ad priſma IKHE, ut priſma

Digitized by Google

GPNV ad priſma CDTH, & ſic porrò in infinitum, ſi pyramidibus ſine fine priſmata ſint inſcripta. Ergo (259.) & ſumma omnium priſmatum inſcriptorum pyramidi QRAC erit ad ſummam omnium inſcriptorum pyramidi SFEZ, ut priſma unum LOVA ad alterum IKHE, ſive ut baſis QRA ad baſim SFE. Sed ſummae inſcriptorum priſmatum pro menſuris (444.) pyramidum ſumi queunt; Ergo etiam pyramis QRAC eſt ad aliam SFEZ, ut baſis QRA ad baſim SFE.

PROPOSITIO XXX.

Tabula VIII. Fig. 15. 16. 446. *Pyramis quadrilatera HGRSK eſt ad aequè altam triangularem ECFA, ut baſis HGRS ad baſim ECF.*

Baſis HGRS reſolvatur in triangula L, V, pyramis autem tota HGRSK in triangulares HSRK, HGRK. Pyramis HSRK eſt (445.) ad aequè altam HGRK, ut baſis L ad baſim V. Ergo componendo ſumma pyramidum HSRK, HGRK, ſeu tota pyramis HGRSK erit ad pyramidem HGRK, ut ſumma baſium L, V, ſeu tota baſis HGRS ad baſim V. Sed (445.) eadem pyramis HGRK eſt ad aliam aequè altam ECFA, ut baſis V ad baſim ECF. Ergo ex aequo pyramis HGRSK erit ad pyramidem ECFA, ut baſis HGRS ad baſim ECF. Q. E. D.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM I.

447. Hinc etiam pyramides quadrilaterae aequè altae HGRSK, QZLOI ſunt, ut baſes HGRS, QZLO. Nam pyramis HGRSK eſt (446.) ad aequè altam triangularem pyramidem ECAF, ut baſis HGRS ad baſim ECF. Similiter pyramis eadem ECFA eſt (446.) ad aequè altam QZLO, ut baſis ECF ad baſim QZLO; ergo ex aequo pyramis HGRSK erit ad aliam QZLOI, ut baſis HGRS ad baſim QZLO. Tabula VIII. Fig. 15, 16, 17.

COROLLARIVM II.

448. Cùm pyramides quadrilaterae aequè altae ſint, ut baſes, inde fit, ut etiam invicem ſint aequales, ſi aequales quoque baſes habuerint.

PROPOSITIO XXXI.

449. *Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis QZLOI, haec ſextans cubi erit.* Tabula VIII Fig. 17.

Si ex eodem centro I ad ſingulos cubi angulos ductae lineae conciperentur, cubus in ſex pyramides quadrilateras aequè altas, & aequalium baſium, atque adeo (448.) aequales divideretur; illarum quippe altitudines forent diſtantiae (368.) aequales centri I à ſex quadratis ambientibus cubum,

baſes vero eſſent aequalia quadrata eadem. Ergo illarum quaelibet, veluti QZLOI ſextans cubi erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

450. Cum (421.) menſura cubi GL ſit productum ex baſi QZLO in altitudinem GQ, vel HP; liquet, menſuram pyramidis QZLOI, quae ſextans (449.) eſt cubi, eſſe productum ex baſi QZLOI in ſextam partem rectae HP, vel in trientem ſuae altitudinis IP.

PROPOSITIO XXXII.

Tabula VIII. Fig. 18. 451. *Menſura cuiuſvis triangularis pyramidis ABCD eſt productum ex eiuſdem baſi ABC in trientem altitudinis DE.*

Tabula VIII. Fig. 17. 18. Concipiatur cubus GL, cuius latus GQ, vel HP duplum ſit altitudinis DE triangularis pyramidis ABCD, atque ex centro I ductis ad baſis angulos rectis IQ, IZ, IL, IO, emergat quadrata pyramis QZLOI. Quia rectae IP, DE dimidiae ſunt GQ, vel HP, aequales mutuò eſſe debent, ideoque aequè altae erunt pyramides QZLOI, ABCD. Igitur pyramis quadrilatera QZLOI erit ad triangularem ABCD, ut (446.) baſis QZLO ad baſim ABC, ſive (439.) ut productum ex baſi QZLO in trientem IP ad productum ex baſi ABC in trientem eiuſdem

iuſdem IP, vel DE. Sed productum ex baſi QZLO in trientem IP eſt (450.) menſura pyramidis QZLOI. Ergo etiam productum ex baſi ABC in trientem DE menſura (255.) erit triangularis pyramidis ABCD Q. E. D.

COROLLARIUM I.

452. Hinc menſura polygonae pyramidis SVORLG eſt productum ex baſi in altitudinis tertiam partem. Diviſo enim in triangula polygono SVORL, pyramis polygona in triangulares pyramides dividetur. Sed ſingulae hae pyramides pro menſuris habent producta (451.) ex ſingulis baſibus in communis altitudinis tertiam partem. Ergo & illarum ſumma, ſeu polygona pyramis SVORLG habet pro menſura productum ex baſi SVORL in altitudinis tertiam partem. Tabula VIII. Fig. 19.

COROLLARIUM II.

453. Quia (427.) cuiuſvis priſmatis AR menſura eſt productum ex baſi SVORL in altitudinem ducta, pyramidis autem SVORLG eiuſdem baſis, & aequè altae menſura eſt (452.) productum ex eadem baſi SVORL in eiuſdem altitudinis tertiam partem; liquet, pyramidem SVORLG eſſe trientem priſmatis AR eiuſdem baſis, & aequè alti.

Co-

Digitized by Google

Corollarium III.

454. Si baſis SVORL ſit polygonum regulare circulo circumſcriptum, cuius laterum numerus augeatur in infinitum, & magnitudo minuatur in infinitum; utique (212.) polygonum pro circulo, priſma pro cylindro, & pyramis pro cono poterit uſurpari. Ergo (453.) etiam conus triens erit cylindri eiuſdem baſis, & aequè alti.

Corollarium IV.

455. Cum cylindri menſura ſit productum (428.) ex baſi in altitudinem ducta; liquet (454.) menſuram coni eiuſdem baſis, & aequè alti eſſe productum ex baſi in altitudinis tertiam partem.

Corollarium V.

456. Quia pyramis triens (453.) eſt priſmatis eiuſdem baſis, & aequè alti, ſicuti etiam conus eſt (454.) triens cylindri; patet, duas pyramides, & duos conos inter ſe eſſe, ut correſpondentia priſmata, & cylindri.

Corollarium VI.

457. Igitur quemadmodum priſmata, & cylindri, ita pyramides, & coni erunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIVM VII.

458. Similiter cum aequalia priſmata, & cylindri reciprocent (440.) baſes, & altitudines, & viciſſim; id conis (456.), & pyramidibus competere etiam debet.

COROLLARIVM VIII.

459. Demum cum in ratione baſium ſint aequè alta (437.) priſmata, & cylindri, in eadem quoque ratione erunt duae pyramides, & duo coni eandem altitudinem habentes.

CAPVT V.

De ſolidorum ſimilium mutua proportione.

PROPOSITIO XXXIII.

460. *Similia parallelepipeda, priſmata, & pyramides ſunt inter ſe, ut cubi laterum homologorum.* Tabula VIII. Fig. 3. 4.

I. Sunto parallelepipeda recta AF, EV mutuò ſimilia: dico, haec inter ſe eſſe, ut cubus lateris HO ad cubum lateris GI. Solidum quippe AF eſt ad EV in ratione (430.) compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed (377.) propter baſes ſimiles L & S, ratio baſis L ad baſim S eadem eſt cum ratione (333.) qua-

quadrati HO ad quadratum GI, atque ob ſimilia (*ex hyp.*) plana AO, EI, ratio altitudinis AH ad altitudinem EG eadem eſt cum ratione lateris HO ad latus GI. Ergo etiam ſolidum AF erit ad aliud EV in ratione compoſita quadrati HO ad quadratum GI, & lateris HO ad latus GI, ſive (434.) ut cubus lateris HO ad cubum lateris GI.

Tabula VIII. Fig. 1. 2. II. Sunto parallelepipeda obliqua AF, EV, quorum altitudines referant rectae AH, EG. Quia haec ſolida (*ex hyp.*) ſunt ſimilia, plana AR, RO, OA ſimilia (377.) erunt planis EP, PI, IE, ideoque tres plani anguli ACR, RCO, OCA aequantur tribus EQP, PQI, IQE. Ergo anguli ſolidi C, & Q ſunt (371.) aequales, ideoque ſi intra invicem poſiti concipiantur, mutuò (372.) congruent, coincidentque proinde latera AC, EQ, quae idcirco ad baſes L, S erunt aequaliter inclinata. Itaque iunctis CH, QG, angulus ACH aequabitur (349.) EQG; ſed recti, ſeu aequales ſunt quoque anguli H, G. Igitur ſimilia erunt (275) triangula AHC, EGQ, & ratio AH ad EG eadem erit cum ratione AC ad EQ, ſeu cum ratione (238.) CO ad QI ob ſimilia (*ex hyp.*) plana AO, EI. Sed etiam ratio baſis L ad ſibi ſimilem baſim S eadem eſt cum ratione (333.) quadrati CO ad quadratum QI. Ergo ratio compoſita baſis L ad baſim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG, ſeu ratio (430.) ſoli-

Digitized by Google

ſolidi AF ad ſolidum EV, eadem erit cum ratione compoſita quadrati CO ad quadratum QI, & lateris CO ad latus QI, ſeu eadem erit cum ratione (434.) cubi lateris CO ad cubum lateris QI. Ergo ſolidum AF erit ad aliud EV, ut cubus lateris CO ad cubum lateris QI. Eadem demonſtratio in priſmatibus quoque, & pyramidibus habet locum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

461. Igitur ſimilia parallelepipeda, priſmata, & pyramides ſunt in ratione (433.) triplicata laterum homologorum.

PROPOSITIO XXXIV.

462. *Cylindri ſimiles ſunt inter ſe, ut cubi diametrorum ſuarum baſium.*

I. Sunto cylindri recti VS, GI, quorum altitudines referant axes AC, EK. Cum ſimiles ſint cylindri, ratio altitudinis AC ad altitudinem EK eadem (376.) erit cum ratione diametrorum FS, QI, & ratio baſis FLS ad baſim QPI eadem (345.) eſt cum ratione quadrati FS ad quadratum QI. Igitur ratio compoſita baſis FLS ad baſim QPI, & altitudinis AC ad altitudinem EK, ſeu (430.) ratio cylindri VS ad cylindrum GI, eadem erit cum ratione compoſita quadrati FS ad quadratum QI, & lateris FS ad latus QI, ſeu eadem (434.) erit cum ratione Tabula VIII. Fig. 20. 21.

cu-

Digitized by Google

cubi diametri FS ad cubum diametri QI. Itaque cylindrus VS erit ad alium GI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI.

Tabula VIII. Fig. 22. 23. II. Si vero cylindri ſimiles VS, GI ſint obliqui, & illorum altitudines referant rectae AH, EO, utique axes AC, EK erunt ad baſes aequaliter (376.) inclinati, ideoque junctis CH, KO, angulus ACH (349.) aequabitur EKO; recti autem ſunt, ſeu aequales anguli H, O. Ergo ſimilia (275.) ſunt triangula ACH, EKO, & ratio altitudinis AH ad altitudinem EO eadem erit cum ratione AC ad EK, vel (376.) FS ad QI. Sed ratio baſis FLS ad baſim QPI eadem (345.) eſt cum ratione quadrati FS ad quadratum QI. Ergo ratio compoſita baſis FLS ad baſim QPI, & altitudinis AH ad altitudinem EO, ſeu (430.) ratio cylindri VS ad cylindrum GI, eadem erit cum ratione compoſita quadrati FS ad quadratum QI, & lateris FS ad latus QI, ſeu eadem (434.) erit cum ratione cubi FS ad cubum QI. Igitur cylindrus VS eſt ad cylindrum GI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

463. Quoniam coni FAS, QEI cylindris ſimilibus inſcripti, ſunt eorum (454.) trientes, & ſimiles (376.) inter ſe; liquet etiam conum FAS eſſe ad ſibi ſimilem QEI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI.

Co-

COROLLARIUM II.

464. Igitur cylindri ſimiles, atque coni ſunt inter ſe in ratione triplicata (333.) diametrorum ſuarum baſium.

LEMMA.

465. *Si ſemicirculo PNG ſine fine rectangula inſcribantur, horum ſumma pro ſemicirculo ſumi poteſt.* Tabula VIII. Fig. 24.

Radio AN in quotvis aequas partes diviſo, inſcribantur ſemicirculo rectangula SXDH, KOBR, quibus deinde extra circulum continuatis, circumſcripta intelligantur rectangula XQED, OLVB, PFTG. Exceſſus rectangulorum circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt rectangula FK, LS, QD, VH, TR, quae ſimul ſumpta conficiunt rectangulum PFTG. Nam quia rectangulum QD (202.) aequatur XH, tria rectangula LS, QD, VH ſimul ſumpta aequabuntur rectangulo LB, ſive (302.) OR, quare utrinque additis rectangulis FK, TR, rectangula FK, LS, QD, VH, TR ſimul ſumpta aequabuntur rectangulo PFTG. Iam vero ſi radius AN in plures ſine ſine partes aequales dividatur, atque adeo in infinitum rectangulorum inſcriptorum numerus augeatur, recta MA, ſive altitudo FP rectanguli PFTG fiet quavis data minor, adeoque & rectangulum PFTG quovis dato minus evadet. Ergo

etiam

etiam exceſſus rectangulorum circumſcripto rum ſupra inſcripta (multoque magis ſupra ſemicirculum PNG) fiet tandem quovis dato minor, ideoque iure merito contemnendus. Quare rectangulorum ſemicirculo ſine fine inſcriptorum ſumma pro ſemicirculo ſumi poteſt. Q. E. D.

COROLLARIUM.

465. Quia dum ſemicirculus PNG rotando circa radium AN deſcribit hemiſphaerium, rectangula ſemicirculo inſcripta, cylindros hemiſphaerio inſcriptos producunt; liquet, quod ſicuti ſumma rectangulorum ſine fine ſemicirculo inſcriptorum, pro ſemicirculo ſumi poteſt, ita ſumma cylindrorum hemiſphaerio ſine fine inſcriptorum, pro hemiſphaerio poterit uſurpari.

PROPOSITIO XXXV.

Tabula VIII. Fig. 25. 26. 466. *SI radiis AM, RV in quotvis aequales partes, & aequè multas diviſis, intelligatur ſemicirculis PAN, CRY inſcripta eſſe rectangula aequè multa, quae circa radios immotos circumacta, inſcribant utrique hemiſphaerio cylindros aequè multos ſibi invicem inſiſtentes; cylindrus genitus a rectangulo OHEF erit ad alium genitum a rectangulo KLIZ, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB.*

Quoniam rectae AC, RS aequè, ſeu eodem

dem modo (*ex hyp.*) continentur in radiis AM, RV, ſive in diametris AQ, RB; utique QA ad AC erit, ut BR ad RS, & dividendo QC erit ad CA, ut BS ad SR. Sed propter QC, CH, CA continuè (282.) proportionales, eſt QC ad CA, ut quadratum CH ad quadratum CA, ſimiliterque ob rectas QS, SL, SR continuè (282.) proportionales, eſt BS ad SR, ut quadratum SL ad SR quadratum. Ergo cum QC ſit ad CA, ut BS ad SR, etiam quadratum CH erit ad quadratum CA, ut SL quadratum ad quadratum SR, & (339.) CH erit ad CA, ut SL ad SR, atque adeo permutando CH ad SL erit, ut CA ad SR, ſive (*ex hyp.*) ut CD ad ST. Ergo & HE dupla CH erit ad LI duplam SL in eadem ratione CD ad ST. Itaque cylindri geniti ab inſcriptis rectangulis OHEF, KLIZ erunt (376.) ſimiles inter ſe; habent enim axes CD, ST proportionales rectis HE, LI, quae ſunt diametri ſuarum baſium. Igitur (461.) cylindrus genitus a rectangulo OHEF erit ad genitum a rectangulo KLIZ, ut cubus HE ad cubum LI. Verum cum ſit HE ad LI, ut CD ad ST, ſive ut AC ad RS, aut ut AQ ad RB; etiam cubus HE (435.) erit ad cubum LI, ut cubus AQ ad cubum RB. Ergo cylindrus quoque genitus a rectangulo OHEF erit ad genitum a rectangulo KLIZ, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB. Q. E. D.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXVI.

467. *Sphaerae PANQ, GRYB ſunt inter ſe, ut cubi ſuarum diametrorum.*

Tabula VIII. Fig. 25. 26. Cylindrus genitus rotatione rectanguli OHEF eſt (466.) ad cylindrum genitum a rectangulo KLIZ, ut cubus AQ ad cubum RB. Similiter cylindrus genitus rotatione rectanguli ohef eſt (466.) ad genitum a rectangulo kliz, ut cubus AQ ad cubum RB. Ergo (226.) cylindrus genitus rotatione rectanguli OHEF eſt ad alium genitum rotatione rectanguli KLIZ, ut cylindrus genitus a rectangulo ohef ad alium genitum a rectangulo kliz, & ſic porro in infinitum, ſi ſine fine cylindri hemiſphaerio ſint inſcripti. Igitur (259.) omnes ſimul cylindri inſcripti hemiſphaerio PAN erunt ad omnes ſimul inſcriptos hemiſphaerio alteri GRY, ut cylindrus genitus a rectangulo OHEF ad genitum a rectangulo KLIZ, ſive (466.) ut cubus AQ ad cubum RB. Sed omnes ſimul cylindri inſcripti hemiſphaeriis PAN, GRY pro hemiſphaeriis ſumi (365.) queunt; ergo etiam hemiſphaerium PAN erit ad aliud GRY, & propterea etiam ſphaera PANQ erit ad ſphaeram GRYB, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB.

Corollarium I.

468. Igitur ſphaerae ſunt quoque in ratione (433.) triplicata diametrorum.

FINIS.

Digitized by Google

E L E N C H V S

Propoſitionum Euclidearum, quarum ſingulis aſſignantur correſpondentes in hoc tractatu.

Libri I. Euclidis.

Prop.	reſp. §.
1	86
4	106
5	182
6	182
8	83
9	85
10	110
11	87
12	112
13	98
14	103
15	96
16	175
18	181
19	181
20	16
23	88
24	104
25	106
26	(174 (?75
27	134
28	149
29	149
30	153
31	123
32	(170 (161
33	151
34	176
35	203
36	203
37	198
38	198
39	199
40	199
41	ex 204
43	178
46	191
47	311
48	325

Libri II. Euclidis.

Prop.	ex §.
1	193
2	315
3	316
4	317
5	318
6	319
11	302
12	321
13	323

Libri III. Euclidis.

Prop.	reſp. §.
1	60
3	(114 (190
4	115
5	33
6	33
7	77
8	77
10	84
11	147
12	147
13	148
15	78
16	124
17	146
18	126
20	140
21	138
22	142
25	160
26	82
27	106
28	(ex 89 (ex 114
29	(ex 89
30	(ex 137
31	144
32	141
35	104
36	296
37	301

Libri IV. Euclidis.

Prop.	reſp. §.
2	167
5	157

Digitized by Google

Prop. 7 *reſp.* §.	191
10	303
11	304
13	209
14	210
15	187

Libri V. Euclidis.

Prop. 7 *reſp.* §.	223
8	228
9	225
10	229
11	226
12	259
14	255
16	254
17	260
18	258
19	261
22	256
23	257

Libri VI. Euclidis.

Prop. 1 *reſp.* §.	241
	& 242
2	262
3	273
4	274
5	284
6	285
Prop. 8	*ex* 309
9	269
11	310
12	268
13	283
14	244
15	244
16	243
17	248
18	287
19	*ex* 340
20	*ex* 343
23	331
24	289
26	291
30	*ex* 302
33	(*ex* 275
	(*ex* 296

Libri XI. Euclidis.

Prop. 1 *reſp.* §.	381
2	382
3	388
4	394
5	395
6	405
7	386
8	406
9	409
10	413
Prop. 11 *reſp.* §.	398
12	407
13	389
14	410
15	411
16	390
17	391
18	408
24	360
28	415
29	417
30	417
31	418
32	337
33	460
34	440

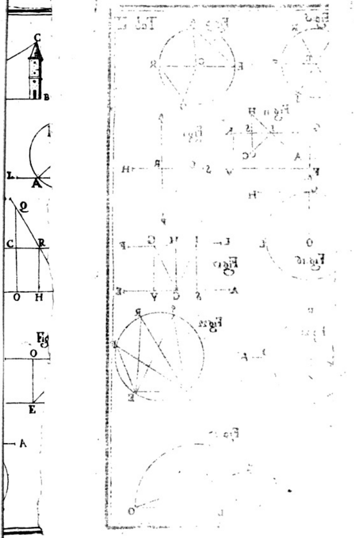
Libri XII. Euclidis

Prop. 1 *reſp.* §.	446
5	444
6	445
7	452
8	460
9	457
10	453
11	458
12	463
14	337
15	440
18	468

Digitized by Google

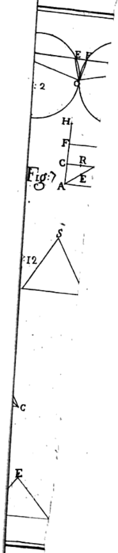


Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

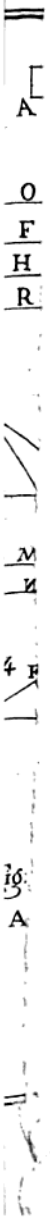


Digitized by Google

Digitized by Google


E
G
F
H
V
O
R
H
I
V

Digitized by Google



Digitized by Google

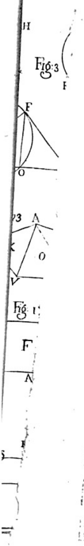
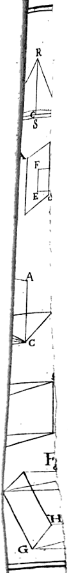


Fig:3
F
O
A
O
V
F

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google


H
L
A

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

005641728

Digitized by Google